



**UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN**

**EL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LOS LIBROS  
DE TEXTO DE MATEMÁTICAS: EL CASO DE LAS  
RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS**

**FERNEY TAVERA ACEVEDO**

**UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
MEDELLÍN**

**2013**

**EL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO DE  
MATEMÁTICAS: EL CASO DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS**

**FERNEY TAVERA ACEVEDO**

**Proyecto de investigación como requisito para obtener el título de  
Magíster en Educación Matemática**

**Asesor:**

**Dr. JHONY ALEXANDER VILLA-OCHOA**

**UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
MEDELLÍN**

**2013**

## NOTA DE ACEPTACIÓN

---

---

---

---

Presidente Jurado

---

Jurado

---

Jurado

Medellín, \_\_\_\_\_ 2013

A DIOS que me ha dado una nueva oportunidad para culminar este proceso y alcanzar un logro más en la vida.

A mi querida madre “*Margarita Acevedo Olarte*” gestora de mi proceso de formación personal.

A mi compañera sentimental “*Alba Lucia Ortiz*” por su apoyo incondicional en mis actividades personales y profesionales.

## Reconocimientos

A mi segunda casa, la “*Universidad de Medellín*” que me abrió sus puertas y permitió formarme a nivel de maestría.

A mi asesor, Dr. “*Jhony Alexander Villa-Ochoa*” por haberme orientado con sus sugerencias, revisiones y aportes en la realización de este proyecto de investigación; además me propuso grandes ideas para analizar los datos encontrados y me invitó a publicar en conjunto.

A mi amigo, consejero y docente, “*Egidio Esteban Clavijo Gañan*” por su gran colaboración y amabilidad ofrecida en este proceso de formación; además fue quién atendió mis duda e inquietudes en el desarrollo de este proyecto de investigación y valoró positivamente el trabajo realizado.

Al jefe del Departamento de Ciencias Básicas “*José Alberto Rúa Vásquez*” por brindarme su amistad y me dio el apoyo necesario para realizar este estudio; a la profesora “*Ana Celi Tamayo Acevedo*”, por su voz de aliento y compañía en el transcurso de estos años.

Y a la persona que evaluó este proyecto, Dr. “*Walter Fernando Castro Gordillo*” por haberme planteado sus comentarios y recomendaciones, para que dicho trabajo se calificara más.

## RESUMEN

Este proyecto de investigación surgió a partir de una revisión inicial de literatura a nivel regional, nacional e internacional, donde se analizaron los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia y algunos estudios e investigaciones relacionados con la variación y la trigonometría plana. Desde los componentes teóricos observados en la literatura se hizo necesario realizar un primer análisis de algunos libros de texto, tanto de la Educación Media como de Universidad, porque habitualmente estos son asumidos como guía de aprendizaje frente al tipo de actividades, ejercicios y “problemas” que se proponen para abordar el estudio de la trigonometría plana.

Los resultados encontrados en este primer análisis muestran, respecto al estudio de las relaciones trigonométricas, que los libros de texto seleccionados proponen pocas actividades, ejercicios y “problemas” donde se evidencie el desarrollo del pensamiento variacional; dado que se observa un marcado énfasis en el manejo apropiado de símbolos, operaciones y propiedades, llevando a la desatención de las nociones variacionales.

Teniendo presente estos resultados, se hizo indispensable analizar otros libros de texto del grado décimo más actualizados, de tal manera, que fueran editados después de conocerse públicamente las investigaciones que se han realizado sobre la variación y sus implicaciones didácticas en el aula de clase a través del uso de la tecnología, así como las orientaciones

propuestas por el MEN, desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia.

Los resultados encontrados en este segundo análisis muestran que los libros de texto analizados, generalmente privilegian el contexto matemático y el contexto evocado, debido a que los ejercicios y “problemas” allí propuestos se solucionan a través de expresiones algebraicas que sirven para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo, dejando relegado el desarrollo del pensamiento variacional a otras temáticas trabajadas en la trigonometría de la circunferencia o en la trigonometría analítica, haciendo evidente la brecha entre las mismas temáticas como lo ha mencionado Montiel (2005).

De este análisis surgió la necesidad de diseñar propuestas alternativas con el propósito de hacer hincapié en la visualización de relaciones funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo; de este modo, se espera aportar algunos elementos para superar la idea de que el estudio de las relaciones trigonométricas son “fórmulas” para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo (Tavera y Villa-Ochoa, 2012).

Desde esta perspectiva, se tiene que el uso del software dinámico (e. g.: Geogebra) permite estudiar algunas temáticas de la trigonometría plana desde el punto de vista variacional, porque incorpora el movimiento en forma de variable para que los estudiante identifiquen los fenómenos de cambio y variación allí expuestos (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010). En este sentido, la visualización juega un papel interesante, porque incide en la generalización y en la abstracción de patrones y regularidades, que son demostrados en la detección de estructuras invariantes,

posibilitando así el hecho de establecer conjeturas y experimentar el cumplimiento de algunas propiedades geométricas que no estaban previamente establecidas (Leung, 2008).

A partir de los resultados obtenidos de esta investigación se resalta que el uso de la tecnología en los libros de texto para el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, se tejen a partir de una interpretación geométrica, lo que implica una *reorganización* de los formatos establecidos para la publicación de estos textos escolares; esta situación puede producir ciertos cuestionamientos a las empresas dedicadas a la producción y comercialización de estos escritos, porque el papel impreso presenta de forma estática los fenómenos de cambio y variación, trayendo como consecuencia que haya un desacuerdo frente a lo que se propone, desde la literatura y complementada por el MEN, sobre el desarrollo del pensamiento variacional.



## TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN.....	1
CAPÍTULO I.....	5
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	5
La trigonometría desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia.....	5
Estudios e investigaciones asociadas con la variación y con la trigonometría.....	11
La trigonometría en los libros de textos. Una primera aproximación.....	23
Planteamiento del problema de investigación.....	47
Objetivos.....	49
Objetivo General.....	50
Objetivos Específicos.....	50
CAPÍTULO II.....	51
MARCO REFERENCIAL.....	51
Elementos conceptuales que sustentan el estudio del pensamiento variacional.....	51
Algunas consideraciones sobre el pensamiento variacional.....	52
Relación entre el pensamiento variacional y el proceso de modelación.....	56

El Pensamiento Variacional y la utilización del Software Geogebra.....	62
 CAPÍTULO III.....	 68
METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	68
 Enfoque y método de investigación.....	 68
Pertinencia de utilizar la técnica del análisis de contenido.....	73
Aplicación de la técnica análisis de contenido a algunos libros de texto del grado décimo.....	80
Proyecto.....	80
Ejecución.....	91
Informe.....	93
 CAPÍTULO IV.....	 97
HALLAZGOS ENCONTRADOS.....	97
 Tareas con interpretación “estáticas” de las razones trigonométricas.....	 98
Tareas por aplicación directa de una razón (estática).....	98
Tareas por composición de razones (estáticas).....	100
Tareas con interpretación “pseudo-dinámica” de las razones trigonométricas.....	102
Tareas con interpretación “dinámica” de las razones trigonométricas.....	105
Tareas por comparación de estados (dinámica).....	105
Tareas de carácter funcional – geométrico.....	107

Tareas a manera de propuesta, donde se visualiza el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas.....	112
 CAPÍTULO V.....	 121
CONCLUSIONES.....	121
 BIBLIOGRAFÍA.....	 126
 ANEXO N° 1.....	 134
 ANEXO N° 2.....	 146
 ANEXO N° 3.....	 153

# ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1. LIBROS DE TEXTO SELECCIONADOS PARA REALIZAR UN PRIMER ANÁLISIS SOBRE EL ESTUDIO DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS.....	23
TABLA 2. TEMÁTICAS QUE SE DESARROLLAN SOBRE EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL TEXTO SERIE MATEMÁTICAS PROGRESIVA “ <i>GEOMETRÍA ANALÍTICA Y TRIGONOMETRÍA</i> ”. .....	24
TABLA 3. TEMÁTICAS QUE SE DESARROLLAN SOBRE EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL LIBRO DE TEXTO “ <i>MATEMÁTICAS EXPERIMENTAL 10</i> ”. .....	29
TABLA 4. TEMÁTICAS QUE SE DESARROLLAN SOBRE EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL LIBRO DE TEXTO “ <i>HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 10</i> ”. .....	32
TABLA 5. TEMÁTICAS QUE SE DESARROLLAN SOBRE EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL TEXTO “ <i>ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA</i> ”. .....	35
TABLA 6. TEMÁTICAS QUE SE DESARROLLAN SOBRE EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL TEXTO “ <i>ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA</i> ”. .....	38
TABLA 7. TEMÁTICAS QUE SE DESARROLLAN SOBRE EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL TEXTO “ <i>MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO</i> ”. .....	42
TABLA 8. TEMÁTICAS QUE SE DESARROLLAN SOBRE EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL TEXTO “ <i>MATEMÁTICAS BÁSICAS CON APLICACIONES A LAS CIENCIAS ECONÓMICAS Y AFINES</i> ”. .....	44
TABLA 9. LIBROS DE TEXTO SELECCIONADOS PARA REALIZAR EL SEGUNDO ANÁLISIS SOBRE EL ESTUDIO DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS.....	82
TABLA 10. RELACIÓN ENTRE EL EJE TEMÁTICO DE INTERÉS, LA PRIMERA CATEGORÍA IDENTIFICADAS Y LAS UNIDADES SINTÁCTICAS ENCONTRADA, EN LOS LIBROS DE TEXTO SELECCIONADOS. ....	87
TABLA 11. RELACIÓN QUE EXISTE ENTRE EL EJE TEMÁTICO DE INTERÉS, LA SEGUNDA CATEGORÍA ENCONTRADA Y LAS SUBCATEGORÍA IDENTIFICADAS, EN LOS LIBROS DE TEXTO SELECCIONADOS. ....	88
TABLA 12. FRECUENCIA DE TAREAS QUE USAN LOS LIBROS DE TEXTOS ANALIZADOS, DE ACUERDO A SUS CONTEXTOS. ....	92
TABLA 13. FRECUENCIA DE TAREAS QUE USAN LOS LIBROS DE TEXTOS ANALIZADOS, DE ACUERDO A SU SOLUCIÓN.....	93

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1. CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA.....	14
ILUSTRACIÓN 2. APLET UTILIZADO PARA LA MEDIDA DE ÁNGULOS.....	21
ILUSTRACIÓN 3. IMAGEN TOMADA DEL LIBRO DE TEXTO “CONEXIONES MATEMÁTICAS 10” .....	99
ILUSTRACIÓN 4. IMAGEN TOMADA DEL LIBRO DE TEXTO “FÓRMULA 10” .....	101
ILUSTRACIÓN 5. IMAGEN TOMADA DEL LIBRO DE TEXTO “TRIGONOMETRÍA, GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ESTADÍSTICA” .....	103
ILUSTRACIÓN 6. IMAGEN TOMADA DEL LIBRO DE TEXTO “LOS CAMINOS DEL SABER MATEMÁTICAS 10” .....	106
ILUSTRACIÓN 7. ELABORACIÓN PROPIA DEL AUTOR, UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA....	109
ILUSTRACIÓN 8. ELABORACIÓN PROPIA DEL AUTOR, UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA....	111
ILUSTRACIÓN 9. CONSTRUCCIÓN PROPIA DE LA VARIACIÓN EN UN PROBLEMA DE TRIGONOMETRÍA.....	114
ILUSTRACIÓN 10. IMAGEN TOMADA DE PÁGINA WEB: HTTP://RECURSOSTIC.EDUCACION.ES/GAUSS/WEB/MATERIALES_DIDACTICOS/ESO/ACTIVIDADES/ GEOMETRIA/TRIGONOMETRIA/ESCALERA_BOMBEROS/ACTIVIDAD.HTML.....	117

## PRESENTACIÓN

Este proyecto de investigación se desarrolló en el marco de la Maestría en “Educación Matemática” en la Universidad de Medellín y tuvo sus comienzos con una revisión de literatura a la luz del pensamiento variacional asociado al estudio de algunos tópicos de la trigonometría plana. Basado en dicha revisión, se determinó el problema de investigación a partir de la siguiente pregunta: ¿Qué aspectos del pensamiento variacional se evidencian a través de algunos libros de textos del grado décimo, en el estudio de las relaciones trigonométricas?

Tener como propósito fundamental en esta investigación analizar las relaciones entre la literatura, las orientaciones planteadas por el MEN desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencia (2006), asociadas a un estudio variacional de la trigonometría y lo que habitualmente se presenta en el aula de clase a través de los libros de texto implicó -como se expresó anteriormente- realizar una revisión inicial de literatura a nivel regional, nacional e internacional para detectar, consultar y obtener bibliografía relevante sobre la *noción de variación* y como éste concepto es posible aplicarlo al *estudio de las relaciones trigonométricas*.

Por otra parte, la idea de centrar la atención en los libros de texto se consolida mediante estudios e investigaciones que se han realizado en las últimas décadas, donde se resalta las implicaciones que tienen los libros de texto en las prácticas educativas generadas por el docente en el aula de clase. Al respecto Randahl (2012) expresa el papel que cumplen los libros de texto

en el aula de clase, pues los asume como: objeto de estudio, material de consulta, registro de las actividades desarrolladas por los estudiantes, recopilación de ejercicios y problemas que se resuelven para mostrar lo aprendido; de igual modo, Selva y Borba (2013) señalan que en muchos casos el libro de texto se consideran como el principal referente del trabajo en el salón de clase debido, en buena parte, a la ausencia de otros materiales que orienten a los profesores en relación con lo que debe ser enseñado y cómo debe hacerse.

A partir de esta revisión de literatura, también se encontró que el estudio de la variación ha ocupado las agendas de muchos investigadores en los últimos años (Cantoral y Farfán, 1998; Díaz, 2005; Reséndiz, 2006; Vasco, 2006; Posada y Villa-Ochoa, 2006 b; Villa-Ochoa y Ruiz, 2010; Villa-Ochoa, 2012) porque han reportado la necesidad de involucrar experiencias en el aula de clase, que le permitan al estudiante analizar situaciones en las cuales la noción de variación y de variable tengan un papel primordial; para ello, algunos autores -de los citados anteriormente- sugieren abordar de manera dinámica los conceptos matemáticos, con la intención de que los aprendices descubran las estructuras invariantes que se generan, por ejemplo, en una figura.

Desde esta perspectiva, se deduce que el pensamiento variacional tiene una estrecha relación con el proceso de modelación, porque según Dörfler (1991) “*generalizar significa construir variables*” (Traducción propia de Dörfler, p. 84) y esto conlleva necesariamente a formular modelos; al menos por dos razones: la primera porque hace énfasis en determinar la forma como una o varias cantidades de magnitud varían con respecto a otra u otras, y la segunda porque tiene

la intención de encontrar la expresión algebraica que permite la variación mediante un modelo funcional.

Los trabajos de León, Carpio, Cuadros y Romero (2011) y Solís (2008), teniendo presente los estudios de Krippendorff (1990), se convirtieron en el soporte fundamental de la metodología de la investigación, puesto que precisan porque es importante utilizar el *enfoque cualitativo de investigación*, el cual está caracterizado por ser inductivo en la medida que procura estudiar la realidad sin necesidad de imponer criterios preestablecidos para el desarrollo de una investigación; se parte del supuesto que mediante observaciones o relatos consistentes y frecuentes, se determinan las evidencias, los significados y las categorías de análisis, dado que van emergiendo por sí solas, buscando comprender la problemática del fenómeno estudiado en su contexto natural.

Es de anotar, que el método de investigación que en este proyecto se utiliza es el *análisis de contenido*, dado que es una “*técnica de investigación que pretende dilucidar la naturaleza del discurso generado en una realidad social, la cual esta determinada a través de la producción documental sustentada en los libros de texto*” (Pino y Blanco, 2008, p. 73). En este sentido, es importante aclarar que en esta investigación solo se realizó el análisis de las actividades propuestas en algunos libros de texto del grado décimo sobre la temática concerniente al “*estudio de las relaciones trigonométricas*”.

Posteriormente se presentan los resultados encontrados de este análisis, los cuales están fundamentados en lo descrito en el marco referencial. Para ello se establecieron unas categorías



de análisis, que hacen referencia al prototipo de tareas que proponen los libros de texto del grado décimo, puesto que estas están direccionadas desde una interpretación “estática” o “dinámica” de las relaciones trigonométricas, además se plantea la necesidad de que tanto los docentes como los libros de texto deben formular tareas que pertenezcan a un “contexto simulado” y/o a un “contexto real”.

Esta propuesta es un referente que aspira a ser ampliada y complementada porque la educación y la formación que ella implica es un proceso continuo en el cual todos los docentes y personas interesadas en el tema, están invitados a realizar sus aportes, porque “la educación es asunto de todos”, en otras palabras, este proyecto de investigación esta dirigido a los implicados con el que hacer educativo, puesto que están comprometidos con el mejoramiento de la calidad de la educación.

# CAPÍTULO I

---

## PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan algunos antecedentes que surgen de una revisión inicial de literatura a nivel regional, nacional e internacional, con el propósito de indagar e identificar que tipo de estudios se han realizado sobre el pensamiento variacional en relación con algunos tópicos de la trigonometría plana. Desde dicha revisión se hizo indispensable examinar los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998), los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006), estudios e investigaciones en el campo de la variación y la trigonometría, y la manera como algunos libros de texto sugieren abordar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la trigonometría. A causa de ello, se pretende analizar las relaciones entre las orientaciones derivadas desde la literatura, lo propuesto por el MEN y lo que se presenta habitualmente en el aula de clase, a través de los libros de texto.

### **La trigonometría desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia**

En primera instancia, se analizaron los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006), los cuales son documentos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional que proporcionan orientaciones frente al currículo del área de matemáticas para que las Instituciones Educativas acojan críticamente las

recomendaciones allí planteadas y transformen, de alguna manera, los planes de estudio de esta área del conocimiento.

Es de anotar que, tanto en los Lineamientos como en los Estándares se sugieren algunas formas de cómo es posible tratar en el aula de clases las temáticas que se deben abordar en trigonometría haciendo uso de las TIC, que van desde la incorporación de la calculadora hasta el diseño e implementación de los objetos de aprendizaje<sup>1</sup> para facilitar así su comprensión. Además se dan algunas indicaciones para que el docente tenga en cuenta la manera como puede desarrollar en los estudiantes las competencias fundamentales del área de matemáticas, que se manifiestan mediante la utilización de los procesos generales de razonamiento, comunicación, modelación, planteamiento y resolución de problemas; lo cual permite valorar si el estudiante está en *“capacidad de dar significado, interpretar, comunicar, construir, argumentar, proponer y usar el conocimiento matemático en contextos diferentes y no simplemente si muestra destreza para operar y repetir procedimientos para hallar un resultado”* (Colombia, 2000, p. 12).

De acuerdo con lo establecido por el MEN se considera que la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría está vinculada al fortalecimiento de los conocimientos básicos (i.e. numérico, espacial, métrico, variacional), los cuales ayudan a desarrollar el pensamiento matemático a través de unos sistemas, que se caracterizan a grandes rasgos, por estar relacionados entre sí y, por ende, actúan de forma conjunta e interdisciplinar, debido a que se complementan mutuamente buscando la formación integral del ser. Por esta razón, se estima que las

---

<sup>1</sup> Según Colombia (2006), se entiende por “objetos de aprendizaje” aquel conjunto de recursos digitales, auto contenibles y reutilizables, con un propósito educativo. Estos se caracterizan por estar constituidos al menos por tres componentes internos, que son: contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización, y para poder utilizarlos en el aula de clase, estos requieren de una estructura de información externa que permite su almacenamiento, identificación y recuperación.

matemáticas proporcionan al estudiante herramientas que posibilitan la comprensión, explicación, análisis, interpretación y solución de situaciones problema que le plantea el entorno social en el cual se desenvuelve.

Por otro lado, desde los planteamientos observados y analizados en estos documentos se encontró que el pensamiento variacional está en estrecha relación con *“el reconocimiento, la percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación, y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”* (Colombia, 2006, p. 66). Para desarrollar este tipo de pensamiento se hace necesario propiciar en el aula de clase espacios para que los estudiantes exploren, reflexionen, deduzcan, conjeturen y planteen nuevas situaciones frente a las relaciones dinámicas que se generan entre los conceptos matemáticos, en este caso específico, aquellas que se originan en algunos tópicos de la trigonometría plana.

De otro modo, el pensamiento variacional no es un logro que se atiende de manera específica en algún nivel educativo, sino que cada grado de grado de escolaridad debe propender por promover el desarrollo de dicho pensamiento; por esta razón, el MEN resalta que este tipo de pensamiento debe cumplir *“un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas”* (Colombia, 2006, p. 66).

Desde esta perspectiva, es posible expresar que el pensamiento variacional está en relación con los otros tipos de pensamiento matemático, porque su estudio se genera a partir de la

búsqueda de una versión más generalizada y abstracta del conocimiento matemático, determinado por el reconocimiento de estructuras invariantes en medio de la variación y el cambio; además por la relación que se origina entre estos pensamientos, es posible identificar herramientas que son utilizadas para modelar situaciones, como resultado de la cuantificación de la variación.

Basado en estas descripciones, se considera que el pensamiento variacional se desarrolla de diversas maneras, por ejemplo, con el pensamiento numérico cuando se reconoce y se identifica las diferentes formas de interpretar y representar un número, también cuando se determina si la solución de un problema es lógica o no; con el pensamiento espacial cuando se efectúa desplazamientos, medidas y cálculos espaciales para relacionarlos y representarlos en el espacio, reflexionando y razonando sobre las propiedades geométricas empleadas; y con el pensamiento métrico cuando se hace uso de la cuantificación numérica de las magnitudes que surgen en la construcción de modelos geométricos, también cuando se realizan comparaciones de diferentes magnitudes, estableciendo relaciones y diferencias entre ellas.

Por otra parte, Vasco (2006) considera que el pensamiento variacional va más allá de las interpretaciones clásicas del álgebra; en ese sentido, proporciona algunas ideas sobre lo que se puede entender por este tipo de pensamiento. Para tratar de ofrecer una descripción más específica de cómo se debe asumir el pensamiento variacional, este autor propone nuevos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones entre este pensamiento, la modelación y la tecnología; de esa manera, puntualiza que este pensamiento puede describirse

[...] como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

De acuerdo con esta mirada, se considera que la tecnología promueve alternativas muy diferentes a las convencionales (i.e. uso de papel y lápiz) sobre las cuales se pueden presentar los conceptos matemáticos (en este caso, aquellos que tienen que ver con algunos tópicos de trigonometría), de tal manera que su intervención sea percibida como una manera de indagar no solo por procesos asociados a la modelación; sino también, como una manera de producir y reproducir las relaciones variacionales que se pueden reconocer entre algunos objetos matemáticos (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010).

En los estudios de Ruiz (2011) se plantea que el pensamiento variacional hace hincapié en *“la habilidad que tiene una persona para identificar estados de cambio de una o más magnitudes, de tal manera que los relacione entre sí, a partir de la creación y manejo de un modelo funcional”* (p. 42). Es de anotar que, dicha habilidad puede y debe ser desarrollada desde y hacia diferentes contextos al interior de las matemáticas mismas, dado que la variación puede ser abordada desde lo numérico, geométrico, métrico y aleatorio.

Tanto desde los documentos propuestos por el MEN (Colombia, 1998; 2006) como desde los planteamientos de Vasco (2006) y Ruiz (2011) se observa un interés en el reconocimiento de la variación en otros tipos de pensamiento (i.e. desde lo numérico, lo geométrico, lo métrico, lo algebraico,...), ya que se incorpora el movimiento en forma de variable, de tal manera, que se

analicen y se interpreten las relaciones producidas por éstas en una situación determinada a través del proceso de la modelación.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, pareciera que el pensamiento variacional y el estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos, poco a poco han ido ocupando un lugar importante en la Educación Matemática por su amplio campo de acción y la utilización adecuada de algunas herramientas tecnológicas que favorecen su aprendizaje; todo este panorama posibilita que los estudiantes de la Educación Media y de Universidad despierten el interés por aplicar en la vida cotidiana los conceptos propios de esta rama de las matemáticas, desarrollando competencias fundamentales para formar un ser integral, las cuales están dadas por las habilidades de pensar crítica y reflexivamente, expresar y comunicar sus puntos de vista, trabajar en forma colaborativa y porque no, aprender de forma autónoma, con la particularidad de que éstas a su vez ayudan a adquirir las competencias básicas que son generadas desde la acción interpretativa, argumentativa y propositiva.

De acuerdo con las descripciones propuestas hasta el momento, se hizo necesaria una revisión bibliográfica de algunos libros de texto; desde allí, se observó que en varias ocasiones este recurso didáctico “desaprovecha” algunas oportunidades para abordar las relaciones dinámicas que se pueden generar en el estudio de la trigonometría. Las evidencias sobre esta aserción, se presentan en el apartado denominado “*La trigonometría en los libros de texto*”, el cual es desarrollado más adelante.

## **Estudios e investigaciones asociadas con la variación y con la trigonometría**

En segunda instancia se encontró, que las investigaciones de Markel (1982) señalan con preocupación que cada día se le está quitando importancia a la trigonometría en la Educación Media y plantean que hay estudiantes universitarios con excelentes desempeños académicos y aptitudes excepcionales en el área de matemáticas; sin embargo, tienen vacíos conceptuales en algunas temáticas propias de esta rama de las matemáticas, debido a que el interés radica en aprender las bases teóricas para afrontar con entera satisfacción los posteriores cursos de cálculo.

A esta situación también se le añade, que la trigonometría parece estar relegada a unos capítulos en algunos libros de texto de geometría o de matemáticas aplicadas; además rara vez se encuentran estudiantes universitarios que hayan realizado un curso completo de esta rama de matemáticas, porque comúnmente la integran con otras temáticas que muy poco tienen que ver con su estudio.

En los escritos de Markel (1982) también se perciben expresiones rústicas al comentar: que el método aplicado en la circunferencia goniométrica es artificial y confuso, debido a que elimina por completo el papel que cumple en trigonometría el triángulo rectángulo y, por lo tanto, no se puede construir un saber basándose en el conocimiento previo que los estudiantes manejan. Además agrega, que la principal atracción en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, es poder ir más allá de sus aplicaciones, la cual esta fundamentada en el hecho de resolver problemas relacionados con cualquier tipo de triángulo; para lograr ésto, se requiere de



una mezcla perfecta entre esta rama de las matemáticas y el álgebra, porque proporciona la exploración conjunta de los conceptos, utilizando como medio el análisis y la geometría.

Por otra parte, los estudios de Blackett y Tall (1991) parten de la hipótesis que el aprendizaje de la trigonometría es versátil utilizando programas informáticos; para ello comparan dos grupos de estudiantes que tuvieron una educación diferente. El *grupo experimental* asistía a clases de trigonometría con la ayuda del computador, el cual permitió explorar las relaciones numéricas y geométricas que se establecen en esta rama de las matemáticas; mientras que el *grupo control* concurría a estas clases utilizando los medios tradicionales (lápiz, papel, regla, transportador,...), según estos autores, así es enseñada la trigonometría por la mayoría de los docentes.

De la investigación realizada por estos autores, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Los jóvenes que fueron educados en el *grupo experimental* mejoraron más su desempeño académico que aquellos que fueron formados en el *grupo control*, porque se considera que la utilización del computador en clase de trigonometría permite a los estudiantes manipular las imágenes y relacionarlas con un valor numérico, de tal manera, que mejora implícitamente la comprensión del concepto de proporción, y esto le sirve a ellos, para entender con facilidad las relaciones trigonométricas que se generan en el triángulo rectángulo y en la circunferencia goniométrica.
- Los programas informáticos que se utilizaron fueron diseñados para mejorar el aprendizaje versátil de la trigonometría, porque le brinda la posibilidad al estudiante de

seleccionar cualquier lado o ángulo de un triángulo, y sobre esta elección propiciarle a la construcción de la figura algunos movimientos de manera dinámicos, debido a que estos programas actúan como un organizador genérico, permitiéndole al docente demostrar y a los jóvenes explorar.

En las investigaciones de Kendal y Stacey (1997) se encontró que para introducir la enseñanza de la trigonometría es posible emplear en el aula de clases dos métodos:

- Uno que hace referencia al método de la razón, donde las funciones trigonométricas se definen como las relaciones de pares de lados en un triángulo rectángulo; a manera de ejemplo, se tiene que el seno de un ángulo se define como el cociente entre la longitud del *“lado opuesto”* y la longitud de la *“hipotenusa”*. En este sentido, es importante tener en cuenta que los obstáculos que se originan en este prototipo de ejercicio surgen por las dificultades que algunos estudiantes tienen para resolver ecuaciones algebraicas, cuando el denominador es la incógnita.
- Y el otro método, hace alusión a la circunferencia goniométrica, que se caracteriza por emplear una circunferencia que tiene como radio la unidad y su centro es el origen de coordenadas cartesianas; en este contexto se resaltan y se definen las funciones trigonométricas como funciones reales de variable real, porque el ángulo que las determina se asume como una magnitud que toma valores en el conjunto de los números reales.

A manera de ejemplo, en una circunferencia el valor del *seno* coincide con el “segmento  $AB$ ” (Ilustración 1), y esto es precisamente, el valor numérico que toma la ordenada en el triángulo rectángulo que se genera; en condiciones similares, sucede casi lo mismo con el coseno, pero con la diferencia de que ésta coincide ya con el “segmento  $OA$ ”, que es el valor numérico correspondiente a la abscisa en el triángulo rectángulo que se origina. De este modo, es posible pensar que las funciones trigonométricas están definidas en la circunferencia goniométrica como las coordenadas  $y, x$  de un punto en una circunferencia que tiene como radio 1.

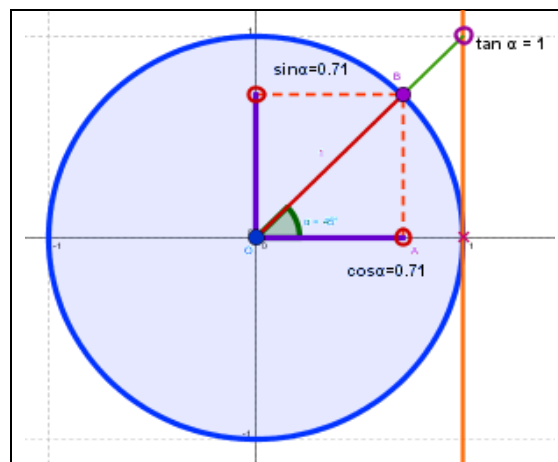


Ilustración 1. Circunferencia goniométrica.  
Tomada con ligeras modificaciones de Kendal y Stacey (1997, p. 324).

De acuerdo con la experiencia vivida en sus investigaciones, Kendal y Stacey consideran que los estudiantes obtienen mejores resultados y tienen mayores éxitos en el aprendizaje de la trigonometría empleando el primer método, debido a que son capaces de identificar la función trigonométrica que requieren para solucionar el problema determinado. Esta situación se produce porque el método de la circunferencia goniométrica requiere un complejo conjunto de procedimientos necesarios para reposicionar el triángulo y poco a poco ir emparejando con el triángulo de referencia.

Según estos autores, otra causa que influyó para que los estudiantes objetos de estudio obtuvieran mejores resultados empleando el método de la razón, fue la capacidad que ellos tuvieron para formular y resolver una ecuación, porque en la mayoría de los casos, estos jóvenes realizaron adecuadamente la transposición de términos que se requieren para encontrar la solución del problema planteado. Sin embargo, es necesario aclarar que ellos obtuvieron mejores resultados cuando las preguntas del problema formulado involucraban la operación multiplicar (i.e. hallar la longitud de un cateto), que aquellos problemas que exigían la obligatoriedad de utilizar la división para encontrar la solución de dicho problema (i.e. hallar la longitud de la hipotenusa).

En los estudios de Orhun (2001) se nota el interés y la preocupación por investigar las falencias que tienen los estudiantes cuando intentan usar la trigonometría para resolver un problema, identificando los errores conceptuales que se cometen, puesto que esta rama de las matemáticas se caracteriza por ser un producto de técnicas algebraicas y geométricas que se reúnen para fortalecer a través del análisis y la interpretación, el desarrollo del pensamiento matemático.

En este orden de ideas, Orhun también considera que la enseñanza de la trigonometría en la Educación Media se limita a calcular sin ninguna suspicacia, el cociente entre las medidas de los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo, para obtener el número real llamado seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante; pero las angustias comienzan cuando los estudiantes que son objeto de estudio, se enfrentan a un problema que muestra la aplicación de esta rama de las matemáticas, porque allí se perciben ciertas dificultades en el hecho de no

comprender la lectura del texto, lo que los conlleva a ser poco creativos en el diseño de una representación gráfica y así, poder hallar el valor numérico con exactitud y sentido de la razón trigonométrica que soluciona el problema planteado.

Esta problemática se puede sustentar a través de las observaciones realizadas por este autor en el aula de clase, en donde la mayoría de los estudiantes se dedican a aprender de memoria los conceptos abordados sobre algunos tópicos de la trigonometría y cuando se acercan a una evaluación suelen estudiarlos muchas veces sin entenderlos, sin saber para que sirven y porque se deben de aprender estas temáticas. Esto hace que este tipo de conocimiento no tenga ningún tipo de fundamentación y validación en el aula de clase, trayendo como consecuencia un pronto olvido.

En los estudios de Weber (2005) se resalta que la trigonometría plana generalmente puede actuar de manera creativa en los estudiantes, porque se considera que es el punto de convergencia entre el razonamiento algebraico, geométrico y numérico; los cuales son utilizados más adelante para comprender algunas temáticas fundamentales del cálculo diferencial e integral. Para realizar esta investigación este autor seleccionó dos grupos, donde examinó la comprensión de los estudiantes en relación con las funciones trigonométricas; el *primer grupo* recibió una instrucción estándar y fue dirigido por un docente que utilizaba la metodología magistral (uso de tiza y tablero), mientras el *segundo grupo* obtuvo una instrucción experimental, la cual está basada en las teorías actuales del aprendizaje y abarcó los siguientes conceptos y procedimientos:

- 1 Calcular el seno y el coseno mediante el círculo de radio unidad;
- 2 Calcular la tangente mediante un gráfico cartesiano;
- 3 Calcular seno, coseno y tangente empleando el triángulo rectángulo;
- 4 Calcular seno, coseno y tangente a través de los ángulos de referencia; y
- 5 Representación gráfica de seno, coseno y tangente.

De la investigación realizada por Weber (2005), se obtuvieron los siguientes resultados:

- Los estudiantes pertenecientes al *primer grupo* desarrollaron una comprensión limitada de las funciones trigonométricas, porque según este autor les hace falta entender el papel que juegan las figuras geométricas en el conocimiento de estas funciones, además tuvieron dificultades para operar la función seno. Debido a esta situación, el investigador sugirió *cambiar este tipo de instrucción*, porque no es suficiente para potenciar la comprensión de las funciones trigonométricas.
- Los estudiantes del *segundo grupo* lograron demostrar una comprensión profunda de las funciones trigonométricas, porque fueron capaces de recordar y derivar sus propiedades, justificando paso a paso las características que las describen; y en las entrevistas hechas se notó que ellos pudieron articular el proceso de calcular la función seno, de tal manera que se aproximaran al valor numérico de esta expresión trigonométrica. Por otra parte, este autor considera que la *instrucción experimental* es eficiente, porque este tipo de instrucción facilita la exploración de los diferentes sistemas de representación, tanto verbal, numérica, gráfica, algebraica y manipulativa.

Desde la perspectiva socio - epistemológica, Montiel (2005) plantea que en la Educación Media el concepto de función trigonométrica se enseña como una extensión de las razones trigonométricas, porque encuentra en el círculo trigonométrico una explicación suficiente y necesaria para dejar claro el dominio de la función en todos los números reales, el significado de un ángulo negativo, la conversión de la unidad de medida (grados – radianes), la periodicidad y el acotamiento de dicha función.

Para realizar su investigación, Montiel (2005) propone que el estudio de las funciones trigonométricas, sólo se puede abordar teniendo en cuenta la evolución histórica de cierta problemática situada en hechos reales de la época, para ello, identifica tres prácticas de referencia que denomina: La matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia del calor, todas ellas ligadas a las prácticas sociales de anticipación, predicción y formalización.

- La **anticipación** se caracteriza por la construcción de modelos a escala de una realidad no “manipulable”. Aquí las razones trigonométricas se convierten en la abstracción inmediata de la proporción y el triángulo es el principal referente matemático, por lo tanto, la matematización de la astronomía se vincula a la aplicación de la trigonometría clásica, porque los modelos matemáticos a construir son de naturaleza geométrica estática. En esta práctica social *“la actividad matemática consiste en medir, comparar, aproximar y calcular eventos relacionados con fenómenos macro para representarlos en modelos geométricos proporcionales que permitan anticipar al hecho real”* (Montiel, 2005, p. 104).

- La **predicción** es la práctica de referencia que hace alusión a la construcción de modelos mecánicos que describen movimientos periódicos, los cuales se convierten en escenario donde nace el carácter funcional de las relaciones trigonométricas. En esta práctica social la actividad matemática consiste en el planteamiento de problemas sobre un movimiento particular, su estudio y su modelación. *“Dado el contexto físico en el que se planteaban los problemas se usa el radián como unidad de medida para las relaciones trigonométricas, logrando con ello homogeneidad en las ecuaciones”* (Montiel, 2005, p. 106).

- La **Formalización**, en esta parte las funciones trigonométricas son consideradas cantidades trascendentes, debido a su estatus funcional y analítico, porque resultan fundamentales en la solución de problemas ligados a fenómenos periódicos. Por ejemplo, la transferencia de calor implica el uso de las funciones trigonométricas como un objeto matemático mayor, denominado serie trigonométrica. En esta práctica social *“la actividad matemática consiste en modelar la variación (distinguiendo lo que varía respecto a qué es lo que produce tal variación) y determinar el estado estacionario”* (Montiel 2005, p. 108).

Posteriormente, Brown (2006) dice que muchos estudiantes tienen una comprensión incompleta o fragmentada de las tres maneras de ver el seno y el coseno, porque unos las asumen como las coordenadas de un punto sobre la circunferencia goniométrica, otros como las distancias horizontales y verticales que generan las gráficas de esas coordenadas y los demás las observan como las razones entre los lados de un triángulo rectángulo; es por este motivo que se



produce una desarticulación entre los ámbitos conceptuales que se deben trabajar en esta área del conocimiento.

Frente a esta situación, Brown expresa que los factores que afectan la comprensión de estos conceptos radican en primer lugar a la interpretación de los gráficos de las coordenadas, pues no tienen claridad si esta información hay que asumirla como geométrica o numérica combinada, lo que implica no ver las coordenadas de un punto como números y longitudes dirigidas de los segmentos horizontales y verticales, que unidos conforman puntos de los ejes, en segundo lugar está la dificultad para entender el seno y el coseno como coordenadas, lo que conlleva a la carencia de asociar los signos positivos o negativos de las coordenadas  $(x, y)$  y, en tercer lugar está el hecho de comprender que los números racionales pueden ser representados como números y como cocientes, debido a que el seno o el coseno representan un número cuando se está describiendo su trayectoria ya sea como distancia o como coordenada, o como un cociente de dos números utilizando el triángulo rectángulo.

Finalmente, los estudios de Moore (2010) parten de las investigaciones realizadas por Weber (2005) y Brown (2006) cuando expresan que los estudiantes tienen dificultades para construir comprensiones coherentes de la trigonometría, específicamente de las funciones trigonométricas; además, advirtió que parte de esta problemática se fundamenta en los planes de estudio del área de matemáticas, porque generalmente presentan dos formas diferentes de abordar la trigonometría (una que hace referencia al uso de la circunferencia unitaria y la otra que hace alusión a la utilización del triángulo rectángulo) sin establecer ninguna relación entre ellas.

Según Moore, una posible solución a esta falta de coherencia, es implementar en las clases de trigonometría el uso de la tecnología, para ello, el docente se vale del diseño de unos *applets* dinámicos, los cuales intentan comprometer a los estudiantes en coordinar y debatir con argumentos como varían las medidas de los ángulos, con el propósito de prepararlos para afrontar más adelante las funciones trigonométricas, donde se formalice la relación entre la covariación de medida de ángulos y un cociente de longitudes (Ilustración 2). Estos *applets* también fueron elaborados con la intención de crear algunas discusiones entre la medida de ángulo que varía y la medida de un radio que igualmente varía en una circunferencia; y esto, es precisamente lo que posibilitó la exploración de las relaciones entre valores de arco, longitud y circunferencia.

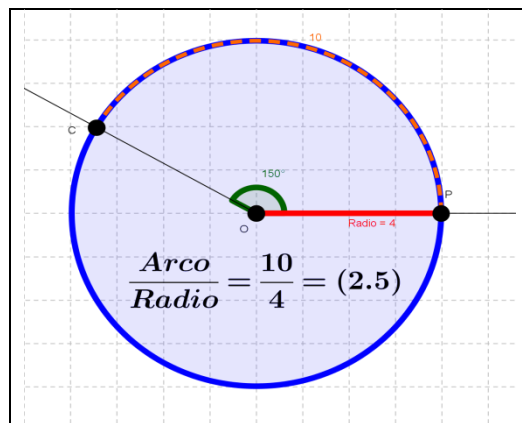


Ilustración 2. Applet utilizado para la medida de ángulos.  
Una interpretación al trabajo de Moore (2010).

La utilización de estos *applets* en clase de trigonometría permitió que los estudiantes tuvieran la oportunidad de reflexionar sobre sus conjeturas en relación con los valores y el movimiento generado en las construcciones. Además, esta práctica posibilitó que algunos jóvenes comprendieran que la medida en radianes de un ángulo también podría definirse como el cociente entre la longitud de arco y la correspondiente longitud de un radio.

Haciendo un análisis de todas estas investigaciones se puede considerar que el uso de las TIC favorecen el aprendizaje de la trigonometría, porque genera el paso de lo numérico a lo algebraico, de lo empírico a lo técnico, de lo inductivo a lo deductivo permitiendo la visualización y el análisis de propiedades geométricas y analíticas. En otras palabras, la tecnología posibilita en cierto modo una didactización de las matemáticas, facilitando la comprensión conceptual de algunos tópicos de la trigonometría, debido a que el estudiante realiza una interacción constante entre las diferentes formas de representación (i.e. verbal, numérica, gráfica, algebraica y manipulativa) que son empleados para su estudio.

De igual forma, es importante considerar que la utilización de las TIC en clase de trigonometría actúan a través del uso de Software de Geometría Dinámica (SGD), con el propósito de proporcionar herramientas a los estudiantes para construir y experimentar con objetos manipulables las relaciones geométricas que se producen entre algunos conceptos y propiedades de las razones y/o funciones trigonométricas. Para lograr ésto, es necesario que el estudiante éste interactuando constantemente con su computador, de tal manera, que una vez construida la figura o la gráfica que representa la situación planteada en el problema, la pueda mover en cualquiera de los objetos independientes que la forman y así poder observar como instantáneamente se modifican o cambian todos los objetos que dependen de ella.

De acuerdo con los diferentes argumentos encontrados en esta revisión inicial de literatura, se hizo indispensable analizar algunos libros de texto, tanto de la Educación Media como de Universidad, para observar e interpretar de que manera estos propician el desarrollo de un pensamiento variacional; los cuales se presentan a continuación:

## La trigonometría en los libros de textos. Una primera aproximación

En tercera instancia, se realizó un primer análisis a algunos libros de texto, tanto de la Educación Media como de Universidad, en los cuales se desarrollan los contenidos temáticos asociados con la trigonometría; estos fueron los siguientes:

Autor(es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición	Editorial
Londoño, N; Bedoya H	1988	<i>Serie Matemática Progresiva</i> <i>"Geometría Analítica y Trigonometría"</i>	Tercera	Norma
Uribe, J	1998	<i>Matemática Experimental 10</i>	Primera	Uros Editores
Zill, D; Dewar, J	2000	<i>Álgebra y Trigonometría</i>	Segunda	Mc Graw-Hill
Swokowski. E; Cole, J	2002	<i>Álgebra y Trigonometría con</i> <i>Geometría Analítica</i>	Decima	Thomson Learning
Mejía F; Álvarez R; Fernández, H	2005	<i>Matematicas previas al cálculo</i>	Primera	Sello Editorial Universidad de Medellín
Álvarez R; Fernández, H; Rúa, J	2009	<i>Matematicas básicas con aplicaciones a</i> <i>las ciencias economicas y afines</i>	Primera	Ecoe Ediciones Ltda
Grupo Editorial Santillana	2010	<i>Hipertexto, Matemáticas 10</i>	Primera	Santillana

Tabla 1. Libros de texto seleccionados para realizar un primer análisis sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.

Estos libros de texto se caracterizan por presentar ciertas similitudes en cuanto a las temáticas que se deben trabajar en el aula de clases, pero también marcan la diferencia en algunos aspectos metodológicos, puesto que están fundamentados en distintas concepciones de percibir las matemáticas, que generalmente pertenecen a ideas platónicas y/o constructivistas, para que los estudiantes al usarlos puedan apropiarse del conocimiento allí impartido.

La selección de estos textos se hizo atendiendo a que son libros que generalmente se referencian como bibliografía básica para trabajar el área de matemática en el grado décimo o para abordar el cursos de álgebra y trigonometría, los primeros semestres de Universidad. Esta

revisión se hizo, porque habitualmente los libros de texto suelen ser usados como mediadores curriculares, que son utilizados por el docente de matemáticas para orientar la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría.

*El primer libro de texto* analizado se denomina *Serie Matemática Progresiva “Geometría Analítica y Trigonometría”* (Londoño y Bedoya, 1988), el cual se caracteriza por plantear “problemas” que simulan una realidad a través del lenguaje; las ideas matemáticas se desarrollan sin perder de vista los objetivos y contenidos propuestos en el programa curricular; cada concepto matemático se ilustra con varios ejemplos, seguidos de una serie de ejercicios que fortalecen la parte procedimental y memorística del estudiante; cada capítulo trae en su parte final un resumen y una prueba de autoevaluación, que persigue explorar y retroalimentar la adquisición de los conceptos aprendidos en cada capítulo; y todos los ejercicios allí propuestos tienen sus respectivas respuestas.

Los contenidos que se desarrollan en este libro de texto en relación con la trigonometría se muestran en la tabla 2:

<p><b>CAPITULO I</b>  <b>Funciones Trigonómicas</b>  <b>Objetivos</b></p> <p>1.1 Ángulos y medida de ángulos  1.2 Funciones trigonométricas de un ángulo agudo en el triángulo rectángulo  1.3 Valor de las funciones trigonométricas para ángulos de <math>30^\circ</math>, <math>60^\circ</math> y <math>45^\circ</math>  1.4 Cálculo de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo  1.5 Resolución de triángulos rectángulos  1.6 Problemas de aplicación de las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos  1.7 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo  1.8 Teorema del seno, teorema del coseno y sus aplicaciones</p>	<p>1.9 Relaciones entre las funciones trigonométricas  1.10 Identidades trigonométricas  1.11 Ecuaciones trigonométricas  1.12 Fórmulas de adición y reducción de ángulos  1.13 Gráficas de las funciones trigonométricas  1.14 Funciones trigonométricas inversas</p> <p><b>Resumen</b>  <b>Autoevaluación</b></p>
---	---

Tabla 2. Temáticas que se desarrollan sobre el estudio de la trigonometría en el texto *Serie Matemáticas Progresiva “Geometría Analítica y Trigonometría”*.

A partir de la tabla de contenido, se observa que este libro de texto está organizado por un desarrollo “lineal” de las temáticas a estudiar, las secuencias “didácticas” se caracterizan por comenzar con la definición de las ideas que se abordarán, luego se dan ejemplos, seguidos de ejercicios para que el estudiante practique lo enseñado y logre “asimilar” los conceptos trabajados en clase, dado que resuelve otros ejercicios similares. En este sentido, es importante resaltar los siguientes ejemplos:

- *Para determinar la altura de un poste, un observador se coloca a 3,5 metros de su pie y ve al poste bajo un ángulo de  $52^{\circ} 30'$ . Calcular la altura del poste.*
- *El ángulo de elevación de una cometa cuando se han soltado 40 metros de hilo es de  $40^{\circ}$ . Determinar la altura de la cometa.*
- *Una escalera de 3 metros está recostada sobre una pared y forma un ángulo de  $63^{\circ} 18'$  con la horizontal del piso. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?*

La situación antes mencionada, parece atender a ciertas prácticas rutinarias en donde el docente presenta un ejercicio prototipo y los estudiantes lo reproducen, para luego en una evaluación, medir hasta donde han sido introyectados dichos conceptos; también es de anotar, que este tratamiento se presenta de manera exigua, debido a que los jóvenes, pueden no tener la posibilidad de explorar, contextualizar, construir y apropiarse de las temáticas propias de la trigonometría.

De acuerdo con lo anterior, el estudio de la trigonometría inicia con el concepto de ángulo y su respectiva medición en grados y en radianes, que son tratados desde lo algebraico y lo geométrico; para luego continuar con las razones y funciones trigonométricas de un ángulo agudo, temática que se orienta en el aula de clases por medio del cociente de los lados de un triángulo rectángulo y su uso se evidencia a través de problemas que requieren del cálculo de distancias inaccesibles o ángulos determinados; después se precisa las razones trigonométricas

para los ángulos notables, para cualquier ángulo agudo y para los ángulos especiales, las cuales se pueden hallar utilizando el triángulo rectángulo, la circunferencia no unitaria y la circunferencia unitaria, aquí es necesario tener presente el manejo apropiado de las tablas trigonométricas con sus respectivos valores, de los ángulos comprendidos en el intervalo  $[0^\circ, 90^\circ]$ , con el uso de estas tablas al “parecer” los estudiantes tienen la oportunidad de establecer ciertas relaciones entre los conceptos de ángulo de referencia, ángulos negativos, signos y gráficas de las funciones trigonométricas.

Posteriormente se plantean problemas que involucran la aplicación de la ley del seno y la ley del coseno, he aquí unos ejemplos extraídos de éste texto:

- *Un observador mira los edificios  $E_1$  y  $E_2$  desde un edificio  $E_3$ , situado a 500 metros de  $E_1$  y 800 metros de  $E_2$ ; si el ángulo que forman las líneas visuales es de  $132^\circ$ , determinar la distancia que separa los edificios  $E_1$  y  $E_2$ .*
- *Dos trenes parten simultáneamente de una estación, en direcciones tales que forman un ángulo de  $30^\circ$ ; uno va a  $15 \text{ km/h}$  y el otro a  $25 \text{ km/h}$ , determina a qué distancia se encuentran separados después de dos horas de viaje.*
- *Una carrilera (en línea recta) de 180 km de longitud tiene por extremos las ciudades A y B; otra carrilera (en línea recta) de 260 km de longitud continua el recorrido de la ciudad B a la de C. Si las dos carrileras forman un ángulo de  $135^\circ 30'$ ; Calcular la distancia entre las dos ciudades A y C.*

Haciendo una revisión a esta clase de problemas, se considera que la aplicación de la trigonometría se reduce a la forma de hallar valores de una incógnita, razón que poco favorece las relaciones funcionales o dinámicas entre las cantidades; en la parte final de este capítulo, se abordan las temáticas concernientes a las identidades y ecuaciones trigonométricas elementales, las cuales se resuelven a través de una verificación, sin hacer ninguna demostración, por sencilla que esa esta.

Según el análisis hecho, es de resaltar que este texto está integrado de alguna manera a la tecnología, porque recomienda la utilización de la calculadora científica para resolver algunos problemas en los cuales hay que encontrar la medida de un lado o un ángulo. Es por esta razón, que se debería recurrir a este instrumento tecnológico que para la época era innovador.

*El segundo libro de texto* analizado se llama “*Matemática Experimental 10*” (Uribe, 1998), en el cual se percibe, según el autor, una manera diferente de abordar los conceptos propios de la trigonometría, porque la metodología allí expuesta permite que el estudiante sea el actor principal de su proceso de aprendizaje, con el propósito de que construya y descubra por sí mismo las nociones y las relaciones existentes que se generan en esta rama de las matemáticas. Para poder alcanzar esto, cada unidad del libro está encabezada por un cuadro que contiene los logros específicos que se desean adquirir con sus respectivos indicadores acordes a la parte cognitiva, procedimental y actitudinal del estudiante, además trae un taller de comprensión lectora, que está fundamentado desde una breve reseña histórica sobre hechos y personajes que tuvieron una incidencia en la elaboración de dicho concepto; el trabajo a realizar se desarrolla a través de unas experiencias concretas, las cuales buscan que el estudiante pueda obtener un aprendizaje y, por ende, potencialice sus competencias básicas.

Al terminar cada unidad aparece un taller de repaso con ejercicios y problemas para observar, valorar y registrar qué tanto aprendieron los estudiantes, también en esta parte hay una simulacro, que consta de una serie de preguntas de selección múltiple con única respuesta, el cual tiene como propósito sensibilizar a los estudiantes para la evaluación de pruebas externas; y en la parte final del texto se han incluido todas las respuestas de los ejercicios planteados, porque



estas le brindan mayor información al estudiante y a su vez, le sirven de guía en su proceso de formación.

Antes de hacer mención a las temáticas propias de la trigonometría que aparecen en este libro de texto es importante nombrar los conceptos matemáticos que se desarrollan previamente, porque sirven de entrada preliminar para entender y comprender mejor dichas temáticas. Al inicio del libro aparece una descripción de los distintos conjuntos numéricos; luego, para hacer generalizaciones, se presentan los elementos básicos del álgebra, que constituyen una revisión general de los conceptos y operaciones algebraicas básicas aprendidas en años anteriores; seguidamente se trabaja con las desigualdades e inecuaciones, cuyo propósito está fundamentado desde el hecho de proponer soluciones a problemas relacionados con desigualdades lineales, cuadráticas y racionales, representando los intervalos en la recta numérica.

Posteriormente se dan pautas para que los estudiantes aprendan a reconocer los elementos que caracterizan a una relación definida en los números reales y que permiten su representación gráfica, después se abordan los conceptos de línea recta y circunferencia y se finaliza con el hecho de reconocer la importancia del concepto de función dentro de la matemática, que aparentemente se utiliza para modelar situaciones de la vida cotidiana.

Las temáticas que se desarrollan en este libro de texto en relación con la trigonometría se pueden observar en la tabla 3:

<p><b>Unidad 6: Las funciones trigonométricas</b></p> <p>6.1 Comprensión de lectura: Historia de la trigonometría 1</p> <p>6.2 Conceptos básicos de la trigonometría</p> <p>6.2.1 Ángulo</p> <p>6.2.2 Ángulo en posición normal</p> <p>6.2.3 Radianes y arcos de circunferencia</p> <p>6.2.4 Relación entre grados y radianes</p> <p>6.3 La función circular</p> <p>6.4 Las funciones seno y coseno</p> <p>6.5 La función tangente</p> <p>6.6 Definición de seno, coseno y tangente en circunferencia de radio distinto de 1</p> <p>6.7 Signo de las funciones trigonométricas</p> <p>6.8 Las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo</p> <p>Taller de la unidad 6 Prepárate para las pruebas ICFES</p> <p><b>Unidad 7: Funciones trigonométricas de cualquier ángulo</b></p> <p>7.1 Comprensión de lectura: Historia de la trigonometría 2</p> <p>7.2 Funciones trigonométricas de <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math> y <math>60^\circ</math></p> <p>7.2.1 Funciones trigonométricas de <math>30^\circ</math></p> <p>7.2.2 Funciones trigonométricas de <math>60^\circ</math></p> <p>7.2.3 Funciones trigonométricas de <math>45^\circ</math></p> <p>7.3 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo</p> <p>7.4 Funciones trigonométricas de ángulos negativos</p> <p>7.5 Las seis funciones trigonométricas</p> <p>Taller de la unidad 7 Prepárate para las pruebas ICFES</p> <p><b>Unidad 8: Identidades y ecuaciones trigonométricas</b></p> <p>8.1 Comprensión de lectura: Historia de la trigonometría 3</p> <p>8.2 Relaciones entre las funciones trigonométricas</p> <p>8.3 Identidades trigonométricas</p> <p>8.4 ¿Cómo probar una identidad?</p> <p>8.5 Ecuaciones trigonométricas</p> <p>Taller de la unidad 8 Prepárate para las pruebas ICFES</p>	<p><b>Unidad 9: Funciones trigonométricas de ángulos compuestos</b></p> <p>9.1 Comprensión de lectura: Historia de la trigonometría 4</p> <p>9.2 Fórmulas de suma y resta de ángulos</p> <p>9.3 Funciones de ángulo dobles y ángulo mitad</p> <p>9.3.1 Funciones de ángulo dobles</p> <p>9.3.2 Funciones de ángulo</p> <p>9.4 Identidades de producto y suma</p> <p>9.5 Resumen de las identidades</p> <p>9.6 Ejercicios resueltos</p> <p>Taller de la unidad 9 Prepárate para las pruebas ICFES</p> <p><b>Unidad 10: Gráficas de las funciones trigonométricas</b></p> <p>10.1 Comprensión de lectura: Historia de la trigonometría 5</p> <p>10.2 Introducción</p> <p>10.3 Funciones periódicas</p> <p>10.4 Variación y gráfica de la función seno</p> <p>10.5 Variación y gráfica de la función coseno</p> <p>10.6 Amplitud, periodo y desfase de las funciones seno y coseno</p> <p>10.7 Las gráficas de las otras cuatro funciones trigonométricas</p> <p>Taller de la unidad 10 Prepárate para las pruebas ICFES</p> <p><b>Unidad 11: Aplicación de la trigonometría</b></p> <p>11.1 Comprensión de lectura: Historia de la trigonometría 6</p> <p>11.2 Introducción</p> <p>11.3 Aplicaciones que originan triángulos rectángulos</p> <p>11.4 Aplicaciones que originan triángulos oblicuángulos</p> <p>Proyecto N° 7: Programa para resolver triángulos</p> <p>Taller de la unidad 11 Prepárate para las pruebas ICFES</p>
---	--

Tabla 3. Temáticas que se desarrollan sobre el estudio de la trigonometría en el libro de texto “*Matemáticas Experimental 10*”.

Según el análisis hecho, es de resaltar que este libro de texto, plantea actividades para que los estudiantes de alguna manera propicien la exploración, reflexión, construcción y apropiación de los conceptos abordados en dichas actividades; esto se hace para que los jóvenes adquieran

una destreza operativa, un manejo adecuado de las temáticas, haga oportunamente interpretaciones de gráficas y solucione a partir de supuestos cualquier dificultad que se le presente.

Desde este punto de vista, el camino a seguir se ve proyectado en primer lugar con la presentación del concepto de ángulo, su medida y uso, a través de la relación directa entre grados, radianes y revoluciones; luego definen el significado de un punto trigonométrico, para poder introducir con el concepto de función circular en términos de seno, coseno y tangente, ya que se consideran básicas para el estudio de las funciones periódicas, las cuales desde su representación gráfica nos permite modelar algunos fenómenos. Después se establecen las funciones trigonométricas de seno, coseno y tangente en una circunferencia unitaria y no unitaria, que se hacen importantes para abordar los signos de dichas funciones, además allí se presentan algunas identidades que involucran los ángulos de referencia en los cuatro cuadrantes; posteriormente se trabaja las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, lo que permite crear algunas veces confusiones entre los estudiantes porque *“no hay recursos didácticos que le permitan al docente hacer el tránsito constructivo entre el triángulo rectángulo, el círculo trigonométrico y las funciones trigonométricas”* (Montiel, 2005, p. 125).

Para solucionar un problema donde se evidencie la aplicación de la trigonometría, es necesario recurrir a la gráfica de triángulos rectángulos o de triángulos oblicuángulos; por ejemplo en el primer caso, generalmente implica determinar la altura, la distancia o el ángulo que hay de un objeto con respecto al otro, para ello es necesario emplear el teorema de Pitágoras o hacer uso de las definiciones establecidas por las relaciones trigonométricas generadas en un

triángulo rectángulo. En el segundo caso se emplean los triángulos acutángulos y obtusángulos; para resolver estos problemas se requiere de dos teoremas fundamentales, que son la ley de seno y la ley del coseno; la primera, se utiliza cuando se conoce dos ángulos y un lado o cuando se tiene dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, y la segunda, se emplea cuando se conocen dos lados y el ángulo entre ellos o cuando se conocen los tres lados.

*El tercer libro de texto* analizado es nombrado por la Editorial Santillana “*Hipertexto, Matemáticas 10*”, el cual se caracteriza, según la editorial, por ser una herramienta básica que le ayuda a los estudiantes a adquirir habilidades y destrezas, permitiéndoles fortalecer en cada pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, aleatorio, variacional) los procesos generales de razonamiento, comunicación, modelación, planteamiento y resolución de problemas. Este texto propone al iniciar cada unidad una serie de lecturas, para que los estudiantes analicen e interpreten situaciones históricas que dieron origen a la construcción de ese conocimiento, también recomiendan hacer uso de las TIC para que los estudiantes observen que el objeto a conocer presenta diferentes formas de ser tratado, para ello, presenta una serie de hipervínculos para que los estudiantes del grado 10° amplíen, profundicen y comprendan los ámbitos conceptuales trabajados en clase; en el desarrollo de las temáticas se encuentran ejemplos resueltos que explican el procedimiento que se debe realizar para obtener un resultado adecuado.

Las temáticas que se desarrollan en este libro de texto en relación con la trigonometría se muestran en la tabla 4:

<p><b>Unidad 2: Funciones trigonométricas</b></p> <p>Comprensión de lectura: El catálogo celeste de Hiparco</p> <p><b>Ángulos</b>  Ángulo en posición normal  Medida de ángulos en el sistema sexagesimal  Ángulos colineales  Medida de ángulos en el sistema cíclico  Longitud de arco  Área del sector circular  Velocidad angular  Velocidad lineal</p> <p><b>Los triángulos y su clasificación</b>  Teorema de Pitágoras</p> <p><b>Funciones trigonométricas</b>  Circunferencia unitaria  Puntos de una circunferencia unitaria  Definición de las funciones trigonométricas  Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales  Relaciones recíprocas  Identidades pitagóricas  Función par e impar  Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal  Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo  Valores de las razones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°  Ángulos de referencia  Funciones trigonométricas de ángulos coterminales</p> <p>Uso de la calculadora  Problemas de aplicación  Taller 2  En síntesis</p> <p><b>Y esto que aprendí ¿Para qué me sirve?</b> Lectura de reflexión “La función seno en la fibra óptica”</p> <p><b>Unidad 3: Gráfica de las funciones trigonométricas</b></p> <p>Comprensión de lectura: Fourier, un matemático creativo y un gran maestro</p> <p><b>Líneas trigonométricas</b>  Líneas trigonométricas para ángulos ubicados en otros cuadrantes</p> <p><b>Gráficas de las funciones trigonométricas</b>  Gráfica de la función seno <math>y = \sin x</math>  Gráfica de la función coseno <math>y = \cos x</math>  Gráfica de la función tangente <math>y = \tan x</math>  Gráfica de la función cotangente <math>y = \cot x</math>  Gráfica de la función secante <math>y = \sec x</math>  Gráfica de la función cosecante <math>y = \csc x</math></p> <p><b>Análisis y elaboración de gráficas</b>  Traslación de las funciones  Reflexión de las funciones  Amplitud, periodo y desfase</p> <p><b>Funciones trigonométricas inversas</b>  Función arco seno  Función arco coseno  Función arco tangente  Función arco cotangente  Función arco secante  Función arco cosecante  Operaciones con funciones trigonométricas inversas</p> <p>Taller 3  En síntesis</p> <p><b>Y esto que aprendí ¿Para qué me sirve?</b> Lectura de reflexión “La función seno en la corriente eléctrica”</p> <p><b>Competencias laborales</b></p>	<p><b>Unidad 4: Aplicación de las funciones trigonométricas</b></p> <p>Comprensión de lectura: La medición del mundo</p> <p><b>Solución de triángulos rectángulos</b>  Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen un lado y un ángulo  Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen dos lados  Ángulo de elevación y ángulo de depresión</p> <p><b>Solución de triángulos oblicuángulos</b>  Ley del seno  Ley del coseno  Área del triángulo  Vectores</p> <p>Taller 4  En síntesis</p> <p><b>Y esto que aprendí ¿Para qué me sirve?</b> Lectura de reflexión “Triángulos oblicuángulos en el diseño de puentes innovadores”</p> <p><b>Unidad 5: Trigonometría analítica</b></p> <p>Comprensión de lectura: El desafío que termino en una amistad</p> <p><b>Identidades trigonométricas</b>  Relaciones recíprocas  Relaciones que son razón de dos funciones  Identidades pitagóricas  Expresión de una función de las otras cinco  Simplificación de expresiones trigonométricas  Demostración de una identidad trigonométrica  Identidades para la suma de ángulos  Identidades trigonométricas para ángulos dobles  Identidades trigonométricas para ángulos medios</p> <p><b>Ecuaciones trigonométricas</b>  Solución de ecuaciones trigonométricas de la forma <math>f(x) = k</math>  Ecuaciones trigonométricas lineales  Ecuaciones trigonométricas cuadráticas  Ecuaciones trigonométricas con identidades fundamentales  Ecuaciones trigonométricas con identidades para ángulos dobles y medios  Ecuaciones trigonométricas con funciones trigonométricas inversas</p> <p>Taller 5  En síntesis</p> <p><b>Y esto que aprendí ¿Para qué me sirve?</b> Lectura de reflexión “La trigonometría en la dirección de un carro”</p>
---	--

Tabla 4. Temáticas que se desarrollan sobre el estudio de la trigonometría en el libro de texto “Hipertexto Matemáticas 10”.

Es de resalta que este libro de texto inicia con una presentación de “repaso” del concepto función y sus propiedades, luego presenta las diferentes formas de representar una función, explica el procedimiento que se utiliza para hallar el dominio y el rango de una función, también aquí se hace claridad cuando una función es creciente, decreciente o constante y se finaliza este trabajo con la clasificación de las funciones polinómicas y trascendentales. Con estos conceptos matemáticos que se desarrollan preliminarmente se espera que sirvan como punto de partida para entender y comprender mejor todo lo referente a la trigonometría.

Desde la tabla de contenido, expuesta anteriormente, se puede considerar que los conceptos básicos de la trigonometría se fundamentan en la clasificación de los ángulos, su medida y uso, los cuales permiten enfatizar en los criterios de semejanza de un triángulo y se finaliza con la práctica del teorema de Pitágoras; todos estos elementos tienen la intención de que el estudiante conozca y maneje la noción de proporcionalidad, porque en ella se cimientan las razones trigonométricas; luego se realiza un estudio detallado de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y su aplicación a través del planteamiento y resolución de problemas.

Posteriormente se definen las funciones trigonométricas como una clase de las funciones circulares, aquí también se manejan los valores de ángulos notables y ángulos especiales, para continuar con algunas relaciones entre los ángulos de referencia, los signos de las coordenadas de los ángulos y la representación gráfica de algunas funciones trigonométricas; después se plantean problemas que involucran la aplicación de la ley del seno y la ley del coseno, para la cual se requiere la construcción gráfica o mental de los triángulos obtusángulos para encontrar su solución; finalmente se resuelven identidades y ecuaciones trigonométricas fundamentales, las

cuales se abordan en el aula de clase desde una simple comprobación, sin llegar a la demostración detallada que explique por qué el resultado es cierto.

En este texto resulta pertinente analizar algunos problemas que escenifican la aplicación de la trigonometría, debido a que se fundamentan en la utilización del lenguaje, pues en su redacción se describen situaciones y contexto supuestamente de la vida cotidiana, en los cuales el estudiante debe comprender e identificar los elementos que subyacen en el problema planteado, para después encontrar el valor numérico de la incógnita, que satisface a dicho problema; esta clase de ejercicios poco favorece el desarrollo del pensamiento variacional, porque éste requiere de las relaciones funcionales o dinámicas entre las cantidades. A manera de ejemplo:

- *Una colina forma un ángulo de  $30^\circ$  con la base. Si una persona recorre 2.500 metros para llegar a la cima de la colina, ¿Cuál es la altura de la colina?*
- *Una persona se encuentra en la terraza de un edificio de 10 metros de altura y observa un automóvil que se encuentra estacionado cerca del edificio. Si el ángulo de depresión que se forma con la línea visual de la persona y el automóvil es  $39^\circ$ , ¿A qué distancia se encuentra el automóvil del edificio?*

Según las temáticas observadas en la tabla de contenido, se puede identificar dos orientaciones fundamentales para abordar en el aula de clase la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría; por un lado está, la trigonometría plana, que se ocupa de las figuras contenidas en el plano, haciendo mención a la resolución de triángulos, con el propósito de determinar los elementos desconocidos cuando se tienen algunos datos y ciertas relaciones entre ellos. Y por el otro está, la trigonometría analítica, que hace referencia a los procesos algebraicos, donde se explican los ámbitos conceptuales que van desde la simplificación y factorización de expresiones trigonométricas hasta la solución de ecuaciones donde intervienen las funciones trigonométricas para determinados ángulo.

A pesar de que este libro de texto se fundamenta en establecer algunas relaciones entre cada pensamiento matemático con los diferentes procesos generales, su estudio parece continuar favoreciendo la ejercitación procedimental y los procesos memorísticos; puesto que en muchos casos, no se emplean recursos manipulativos experimentales ni se utilizan las herramientas tecnológicas, aunque este libro las recomiende, las cuales sirven como mediadores didácticos para construir y apropiarse de un concepto matemático.

El cuarto texto revisado se llama “*Algebra y Trigonometría*” (Zill y Dewar, 2000), en éste se promueve una serie de ejercicios que incluyen abundantes problemas con preguntas de falso - verdadero, complete y aplicaciones que requieren la construcción e interpretación de gráficas, con la intención de que los estudiantes hagan más solida la comprensión de los conceptos tratados y realicen algunas prácticas para reforzar sus conocimientos.

En la tabla 5 se pueden observar las temáticas que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

<p><b>CAPITULO 6</b> <b>Trigonometría del triángulo</b></p> <p>6.1 Ángulos y su medición 6.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos 6.3 Aplicaciones de la trigonometría a triángulos rectángulos 6.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales 6.5 Ley del seno 6.6 Ley del coseno</p> <p>Conceptos importantes Ejercicios de repaso</p> <p><b>CAPITULO 7</b> <b>Trigonometría analítica</b></p> <p>7.1 Función circular 7.2 Gráficas de las funciones trigonométricas</p>	<p>7.3 Movimiento armónico: variaciones de las gráficas de seno y de coseno 7.4 Identidades trigonométricas 7.5 Fórmulas de la suma y la diferencia 7.6 Fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio 7.7 Fórmulas del producto y la suma 7.8 Ecuaciones trigonométricas 7.9 Funciones trigonométricas inversas 7.10 Forma trigonométrica y raíz N-ésima de números complejos</p> <p>Conceptos importantes Ejercicios de repaso</p>
---	--

Tabla 5. Temáticas que se desarrollan sobre el estudio de la trigonometría en el texto “*Algebra y Trigonometría*”.



En este libro se hace un análisis sobre el concepto de ángulo, luego continúan con el estudio de las definiciones de las relaciones trigonométricas para los ángulos agudos en el triángulo rectángulo y demuestran que en cualquier triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa tiene una longitud igual a  $\sqrt{2}$  veces la longitud de los catetos; además validan que en cualquier triángulo rectángulo cuyos ángulos midan  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , se cumple que el cateto opuesto al ángulo de  $30^\circ$  mide la mitad de la hipotenusa; de igual modo, este libro realiza la demostración que en cualquier triángulo rectángulo cuyos ángulos midan  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , se cumple que el cateto opuesto al ángulo de  $60^\circ$  mide  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  veces la longitud de la hipotenusa.

Posteriormente, este texto continúa con la aplicación de la trigonometría, la cual se genera desde la utilización de los triángulos rectángulos y los triángulos oblicuángulos, donde se caracteriza por presentar un dominio estático, porque para hallar las distancias y ángulos se requería pensar hipotéticamente, puesto que no varían los valores en su desarrollo y, por lo tanto, las medidas encontradas, siempre van a permanecer fijas. En este sentido, es importante mostrar los siguientes ejemplos:

- *Una palma proyecta una sombra de 18 metros de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto de la palma es de  $48^\circ$ , ¿Cuál es la altura de la palma?*
- *Un salvavidas se encuentra en una torre de 20 metros del nivel del mar. Descubre a una persona que necesita de su ayuda a un ángulo de depresión de  $35^\circ$ , ¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra esa persona?*
- *Dos salvavidas se encuentran en la orilla de una playa a una distancia uno del otro de 1.5 km en los puntos A y B, y divisan un bote que se está hundiendo situado en el punto C. Si el salvavidas en A mide un ángulo CAB igual a  $79.3^\circ$  y el que está en B mide un ángulo CBA igual a  $43.6^\circ$ , ¿A qué distancia está el bote de cada salvavidas? ¿A qué distancia está el bote de la costa?*

En este contexto vale la pena aclarar, que el uso de las TIC se fundamentan desde la utilización de las calculadoras, puesto que le permite al estudiante hacer gráficas de funciones polinómicas, racionales y trascendentes, donde se analice el dominio y el rango de una función, el intercepto de la recta o de la curva con el eje  $y$ , hallar las raíces de un polinomio, determinar visualmente si la función es creciente o decreciente, observar cuando en una función racional hay una asíntota vertical, horizontal u oblicua, reflexionando sobre la causa que las origina.

Por otro lado, en este libro se expresan las relaciones existentes entre las funciones trigonométricas, lo que permite analizar con propiedad si una igualdad es una identidad, la cual deberán probar, y para ello recomiendan una serie de procedimientos que facilitan el proceso a seguir, en caso de que un ejercicio no sea una identidad incitan al estudiante a que encuentre un contraejemplo, que es el valor de un ángulo para el cual no se cumple la igualdad. Para resolver una ecuación trigonométrica se debe aplicar adecuadamente las identidades y las propiedades del álgebra con el objeto de escribir la ecuación en términos de una sola variable, para luego hallar los valores del ángulo que satisfacen la ecuación.

*El quinto libro* analizado se denomina “*Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*” (Swokowski y Cole, 2002), en el cual se caracteriza por mostrar ejercicios y problemas que al inicio cuentan con un grado de dificultad mínimo; no obstante, es de aclarar que estos progresan gradualmente hasta plantear situaciones más difíciles, muchos de ellos contienen la visualización de gráficas, lo que proporciona claridad en el uso de definiciones, leyes y teoremas, otros requieren que los jóvenes encuentren un “modelo matemático” para los datos dados, las

explicaciones suelen ser minuciosos, bien detallados y presentan cierto grado de similitud a los problemas propuestos para que ellos los resuelvan.

De este texto, se resalta que expone pruebas de su contenido al finalizar cada capítulo, las cuales proporcionan una fuente adicional de preguntas para diseñar más adelante una evaluación; también hace claridad en aspectos como diferenciar que una ecuación no es una identidad, la utilización de la fórmula de resta del coseno para encontrar un valor exacto cuando se dan valores trigonométricos precisos y como encontrar un valor trigonométrico exacto y el signo de otra función trigonométrica dado que el ángulo es una constante.

Las temáticas que se desarrollan en este libro de texto en relación con la trigonometría se pueden observar en la tabla 6:

<p><b>CAPITULO 6</b> <b>Funciones Trigonómicas</b></p> <p>6.1 Ángulos</p> <p>6.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos</p> <p>6.3 Funciones trigonométricas de números reales</p> <p>6.4 Valores de las funciones trigonométricas</p> <p>6.5 Gráficas trigonométricas</p> <p>6.6 Otras gráficas trigonométricas</p> <p>6.7 Problemas de aplicación</p> <p>Ejercicios de repaso</p> <p>Ejercicios de análisis</p> <p><b>CAPITULO 7</b> <b>Trigonometría analítica</b></p> <p>7.1 Verificación de identidades trigonométricas</p> <p>7.2 Ecuaciones trigonométricas</p> <p>7.3 Fórmulas de suma y resta</p> <p>7.4 Fórmulas de ángulos múltiples</p> <p>7.5 Fórmulas de producto a suma y de suma a productos</p> <p>7.6 Funciones trigonométricas inversas</p> <p>Ejercicios de repaso</p> <p>Ejercicios de análisis</p>	<p><b>CAPITULO 8</b> <b>Aplicaciones de la trigonometría</b></p> <p>8.1 Ley de los senos</p> <p>8.2 Ley de los cosenos</p> <p>8.3 Vectores</p> <p>8.4 Producto punto</p> <p>8.5 Forma trigonométrica para números complejos</p> <p>8.6 Teorema de Moivre y raíces N-ésimas de los números complejos</p> <p>Ejercicios de repaso</p> <p>Ejercicios de análisis</p>
---	---

Tabla 6. Temáticas que se desarrollan sobre el estudio de la trigonometría en el texto “Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica”.

Es de anotar, que este texto también trae como aporte al trabajo didáctico abundantes ilustraciones, tablas explicativas y de resumen; numerosos ejemplos, explicaciones paso a paso, ejercicios de análisis, ejemplos y ejercicios para usar la calculadora graficadora con pantallas para la TI-83 Plus y la TI-86. En las aplicaciones enumera los pasos del procedimiento que se utilizan para hallar la solución del ejercicio planteado, ayudan a resolver problemas de manera sistemática, también posee las gráficas de las funciones trigonométricas y sus funciones inversas, y en forma tabulada presenta los valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales sobre una circunferencia unitaria.

Según lo presentado en la tabla 6, es importante hacer un análisis a las secciones 6.7, 8.1 y 8.2, porque mencionan la solución de problemas aplicados a la trigonometría, utilizando el triángulo rectángulo y los triángulos oblicuángulos. En éste análisis se determinó que para poder resolver los problemas planteados en la sección 6.7 se espera que todos los estudiantes sepan hallar los valores de las relaciones trigonométricas y ángulos usando la calculadora científica. A continuación se presentan algunos ejemplos:

- *Calcula el ángulo de elevación  $\alpha$  del Sol si una persona que mide 5 pies de altura proyecta una sombra de 4 pies de largo al nivel del suelo.*
- *Desde un punto al nivel del suelo y a 135 pies de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es  $57^{\circ}20'$ . Calcular la altura de la torre.*
- *Desde un punto A que está 8.20 metros sobre el nivel del suelo, el ángulo de elevación de la parte alta de un inmueble es de  $31^{\circ}20'$  y el ángulo de depresión de la base del mismo es  $12^{\circ}50'$ . Calcula la altura del edificio.*

Por otra lado, en las secciones 8.1 y 8.2 se plantean problemas que para ser resueltos, requieren de la aplicación de la ley de seno o la ley del coseno teniendo en cuenta los datos dados, por ejemplo, la primera se utiliza cuando se conocen los dos lados y un ángulo opuesto a

uno de ellos o cuando se tiene los dos ángulos y cualquier lado; mientras la segunda se utiliza cuando se conocen los dos lados y un ángulo comprendido entre ellos o cuando se tiene los tres lados. Como acto seguido, se muestran algunos problemas que este libro plantea:

- *Para hallar la distancia entre dos puntos A y B en las márgenes opuestas de un río, un agrimensor traza un segmento de recta AC de 240 yardas de longitud junto a una de las márgenes, y determina que las medidas del ángulo BAC y el ángulo ACB son  $63^{\circ} 20'$  y  $54^{\circ} 10'$ , respectivamente. Calcula la distancia entre A y B.*
- *Con el propósito de establecer la distancia entre los puntos A y B, un agrimensor selecciona un punto C que está a 375 yardas de A y 530 yardas de B. Si el ángulo BAC mide  $49^{\circ} 30'$ , calcula la distancia entre A y B.*
- *Un poste vertical de 40 pies de altura está en una cuesta que forma un ángulo de  $17^{\circ}$  con la horizontal. Calcula la longitud mínima de cable que llegará de la parte superior del poste a un punto a 72 pies cuesta abajo (medido desde la base del poste).*

Se considera que las dificultades más notorias que presentan los estudiantes para resolver esta clase de problemas, radican en el hecho de no realizar una comprensión de lectura con sentido de lo que allí se está expresando y, por lo tanto, no elaboran una relación directa entre las diferentes formas de representación, pues, algunos de ellos no conciben cómo pasar los datos expresados en el problema a una representación gráfica o a un lenguaje matemático más formal, tampoco tienen en cuenta el concepto de proporcionalidad para hacer los dibujos a escala; también muchos de los errores que ellos cometen, están fundamentados en el hecho de no identificar con claridad las relaciones allí expuestas, y si logran reconocer el tipo de relación que se origina en el problema, se les dificulta resolverla satisfactoriamente.

El sexto libro analizado es nombrado por el Sello Editorial Universidad de Medellín “*Matemáticas previas al cálculo*” (Mejía, Álvarez y Fernández, 2005), el cual según su introducción exhibe una exposición clara, sencilla y ordenada una cadena de conceptos matemáticos, que van desde la resolución de ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado,

con sus respectivas aplicaciones; los diferentes tipos de relaciones y funciones, y termina con algunos capítulos dedicados a la trigonometría.

Los temas planteados en este texto ofrecen algunas ilustraciones como ejemplos que le permiten a los estudiantes hacerse a una mejor comprensión de los conceptos, los ejercicios propuestos tienen la intención que sus usuarios puedan mejorar las habilidades y destrezas matemáticas, y así fortalecer sus conocimientos algebraicos previos al cálculo; el texto también trate las respuestas de todos los ejercicios pares planteados y una bibliografía complementaria que puede llegar a ser de gran utilidad, en cualquier momento.

Por otra parte, en el capítulo llamado “Aplicación de la trigonometría”, se expresa que esta rama de las matemáticas estudia las relaciones existentes entre las medidas de las longitudes de los segmentos que forman los lados de un triángulo con las medidas de las amplitudes de sus ángulos, de tal manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras. Para resolver problemas donde se requiere la construcción de un triángulo rectángulo es importante tener en cuenta la definición de las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y el concepto de ángulo de elevación y ángulo de depresión; mientras que para la solución de triángulos oblicuángulos es necesario tener presente que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$  y de acuerdo a los datos proporcionados por el problema se emplea la ley del seno o la ley del coseno.

Las temáticas que se desarrollan en este libro en relación con la trigonometría se muestran en la tabla 7:

<p><b>CAPITULO 8</b> <b>Elementos de Trigonometría Plana</b></p> <p>8.1 Ángulos 8.2 Razones trigonométricas 8.3 Funciones trigonométricas de ángulos 8.4 Cofunciones trigonométricas</p> <p><b>CAPITULO 9</b> <b>Identidades y Ecuaciones Trigonometría</b></p> <p>9.1 Identidades Fundamentales 9.2 Identidades Trigonómicas 9.3 Ecuaciones Trigonómicas</p> <p><b>CAPITULO 10</b> <b>Funciones Trigonómicas de más de un Ángulo</b></p> <p>10.1 Funciones e Identidades para la suma de ángulos 10.2 Funciones e Identidades para la diferencia de ángulos 10.3 Funciones trigonométricas de un ángulo en términos de las del ángulo medio 10.4 Funciones trigonométricas del ángulo medio 10.5 Fórmulas para expresar la suma y diferencia de dos funciones trigonométricas en términos del producto de las mismas</p>	<p>10.6 Fórmulas para expresar el producto de dos funciones trigonométricas en términos de la suma de las mismas 10.7 Identidades trigonométricas con funciones de más de un ángulo 10.8 Ecuaciones trigonométricas con funciones de más de un ángulo 10.9 Relaciones trigonométricas inversas 10.10 Funciones trigonométricas inversas 10.11 Gráfica de funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas 10.12 Identidades trigonométricas inversas 10.13 Ecuaciones con funciones trigonométricas</p> <p><b>CAPITULO 11</b> <b>Aplicación de la Trigonometría</b></p> <p>11.1 Solución de triángulos rectángulos 11.2 Solución de triángulos oblicuángulos Ley del Seno Ley del Coseno</p>
---	---

Tabla 7. Temáticas que se desarrollan sobre el estudio de la trigonometría en el texto “*Matemáticas previas al cálculo*”.

Según lo observado y analizado, este texto se caracteriza por proponer actividades que requieren de la memorización de los conceptos abordados, como prueba de ello, utiliza el criterio de razón entre los lados de un triángulo rectángulo para explicar cómo es posible obtener las razones trigonométricas de cualquier ángulo y muestra como a partir de un ángulo en posición normal se generan las funciones trigonométricas, para que el estudiante encuentre a través de fórmulas, los valores que se originan en cada relación, igualmente sucede lo mismo con los problemas que requieren de la construcción de triángulos oblicuángulos, para aplicar la ley del seno y la ley del coseno. En este libro, también se percibió que en ningún momento se trabaja estas temáticas utilizando herramientas de tecnología diferente a una calculadora científica.

*El séptimo libro* analizado se denomina “*Matemáticas básicas con aplicaciones a las ciencias económicas y afines*” (Álvarez, Fernández y Rúa, 2009), está constituido por doce capítulos, los primeros cinco de ellos hacen referencia a un repaso y revisión de los conceptos de conjuntos numéricos, teoría de conjuntos, las operaciones algebraicas básicas trabajadas en el bachillerato. En los siguientes capítulos, se trabajan ecuaciones e inecuaciones de una variable, se repasan los diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se practica la modelación y solución de aplicaciones con una o varias incógnitas.

Antes de iniciar con el capítulo dedicado a la trigonometría se hace un estudio detallado de la forma de resolver las fracciones parciales, así como se recuerda en forma breve el uso y manejo de los operadores factorial, sumatoria y productoria; el texto presenta algunas aplicaciones de la vida cotidiana con las funciones exponencial y logarítmicas, también exhibe situaciones de la vida laboral y deportiva mediante problemas de lógica expuestos gráficamente en diagramas de Venn y en forma analítica mediante el uso de las fórmulas para el número de elementos de dos o tres conjuntos no vacíos. El último capítulo de este texto es llamado “Elementos de trigonometría”, el cual es analizado más adelante.

Es de anotar, que en este libro, todos sus capítulos incluyen problemas de aplicación que tienen que ver con la formación de estudiantes iniciando estudios de ingeniería o áreas económicas, al final de cada capítulo, hay una sección donde aparece las instrucciones para realizar ejercicios empleando el programa Matlab, que simplifica los procesos operativos y permite desarrollar la capacidad de análisis de los resultados, tratando de optimizar los procesos de cálculo cuando se cuenta con la habilidad en el manejo del software y el computador.



En la tabla 8 se observan las temáticas que se proponen en este libro para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

<b>CAPITULO 12</b>	
<b>Elementos de Trigonometría</b>	
12.1.	Elementos previos
12.2.	Funciones trigonométricas o circulares
12.3.	Funciones trigonométricas de ángulos especiales
12.4.	Gráficas de las funciones trigonométricas
12.5.	Identidades fundamentales
12.6.	Identidades trigonométricas
12.7.	Funciones trigonométricas inversas
12.8.	Ecuaciones trigonométricas
12.9.	Aplicación de la trigonometría
12.10.	MABLAT

Tabla 8. Temáticas que se desarrollan sobre el estudio de la trigonometría en el texto *“Matemáticas básicas con aplicaciones a las ciencias económicas y afines”*.

Según lo observado, se considera que este texto elabora un tratamiento básico de la trigonometría porque comienza explicando algunas definiciones: ángulo y sus medidas utilizadas, luego describen como desde el criterio de razón entre los lados de un triángulo rectángulo, se obtienen lo que ellos llaman funciones trigonométricas, que no pasan de ser los llamados números seno, coseno y tangente. Además hacen referencias a las funciones trigonométricas para ángulos especiales o de referencia, de igual manera realizan un somero proceso de las identidades trigonométricas, las ecuaciones y por último las aplicaciones para la ley del seno y el coseno. Cabe anotar que el tratamiento dado en este texto a las funciones trigonométricas es superficial y no se profundiza mucho en el tema, sino que trata de resolver las situaciones planteadas de forma mecánica y así obtener los valores en cada relación.

En los siete libros de texto analizados se encontró la siguiente regularidad: *La mayoría de los ejercicios y tareas se orientan a la solución de problemas, donde hay que hallar el valor numérico de una distancia o de un ángulo en un triángulo en el cual los demás datos están*

*dados. Así mismo se desaprovechan los contextos de los ejercicios planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen; en otras palabras, las medidas a determinar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales se pueden establecer ciertas relaciones funcionales.*

De otro modo, en la revisión de estos textos se observa un uso constante de fórmulas, caracterizado por un dominio algebraico y procedimental, que hace énfasis en el manejo apropiado de símbolos, operaciones y propiedades y, en ocasiones, se desatiende al reconocimiento de las nociones dinámicas que se presentan en algunos tópicos de la trigonometría. A continuación se transcriben algunos “problemas”, que muestran a través de sus planteamientos, la “desarticulación” que existe entre estos enunciados y el desarrollo del pensamiento variacional:

- *De la cima de una torre de 375 pies de altura, el ángulo de depresión hacia un hombre ubicado en el plano horizontal a través del pie de la torre es de  $37^{\circ}24.6'$ . Encontrar la distancia del hombre al pie de la torre.*
- *De la cima de una faro de 8 metros de alto se divisa una lancha con un ángulo de depresión de  $8^{\circ}$ . Calcular la distancia entre la lancha y el pie del faro.*
- *Cuando el ángulo de elevación del Sol es de  $64^{\circ}$ , un poste de teléfono inclinado a un ángulo de  $9^{\circ}$  en dirección opuesta al Sol arroja una sombra de 21 pies de largo a nivel del suelo. Calcula la longitud del poste.*
- *Un puente de 24 metros de largo une dos colinas cuyas laderas forman con el horizonte ángulos de  $23^{\circ}$  y  $32^{\circ}$ . ¿Cuál es la altura del puente con respecto al vértice del ángulo formado por las dos laderas?*

Se observa que este tipo de “ejercicios” ocupan la parte de las aplicaciones de las relaciones trigonométricas en los libros de texto analizados y no se encontró otro tipo de “problemas” que ofrezcan la descripción de una relación funcional entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Estos primeros hallazgos ponen de relieve la necesidad de establecer nuevas relaciones en las cuales los conceptos matemáticos se perciban de una manera dinámica. En ese sentido, el uso del software Geogebra, se muestra como una herramienta importante para resaltar nociones de tipo variacional (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010), porque brinda la posibilidad de vivenciar de manera experimental los conceptos y propiedades que hace poco solo se manejaban desde el papel bajo ideas en abstracto.

Por otra parte, las diferencias más notorias que se perciben en esta revisión bibliografía es que estos libros de texto proponen la utilización de distintos medios tecnológicos, que van desde el uso de la calculadora, ya sea científica o graficadora hasta la incorporación del programa Matlab, que integra el análisis numérico y la visualización gráfica a través del computador, sin embargo, a pesar de estas diferencias estos son vistos, generalmente como medios para evitar cálculos largos y tediosos, que permiten establecer ciertas relaciones entre el proceso algebraico, numérico y geométrico de una expresión, trayendo como consecuencia que la tecnología no sea asumida como una herramientas para explorar, reflexionar, conjeturar o deducir un concepto matemático, especialmente aquellos que posibilitan el estudio de las relaciones trigonométricas.

De acuerdo con los resultados encontrados en este primer análisis se puede considerar que los libros de texto seleccionados descuidan algunos elementos del pensamiento variacional, lo cual hace creer que determinados aspectos planteados en los Lineamientos Curriculares (1998), ratificados en los Estándares Básicos de Competencia (2006) y las experiencias vividas que se muestran en las investigaciones realizadas sobre esta temática no han sido tenidas en cuenta, lo cual es perfectamente innatural aseverar que estos textos no proponen actividades, ejercicios y

“problemas” donde se evidencie fenómenos de cambio y variación en el estudio de las relaciones trigonométricas, posiblemente porque fueron editados en diferente épocas, antes de conocerse públicamente las indagaciones que se han elaborado al respecto y el trasfondo de lo emanado por el MEN. Debido a esta situación, se observa la necesidad de escudriñar libros de texto más actualizados.

### **Planteamiento del problema de investigación**

Los antecedentes presentados anteriormente permite inferir que no se observan de manera explícita los elementos que propician el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas, dado que los libros de texto seleccionados no integran los resultados de las investigaciones que se han realizado sobre esta temática, por lo tanto, se considera que en estos textos existe una omisión de actividades, ejercicios y “problemas” que centren la atención en el reconocimiento y la matematización de la variación, de acuerdo con lo propuesto por el MEN, desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencia (2006).

De otro modo, se ha observado que uno de los principales recursos didácticos que emplea el docente para planificar sus intervenciones en el aula de clase son los libros de texto; debido a esta situación, se considera que éstos son asumidos como un elemento básico dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Randahl, 2012), dado que orientan y encauzan muchas de las actividades que son desarrollados por el estudiante. A raíz de esto, la mayoría de los docentes no solamente utilizan los libros de texto como guía para explicar los conceptos

matemáticos, sino también como fuente bibliográfica para extraer ejercicios y problemas que son expuestos más adelante en evaluaciones, con el propósito que los estudiantes demuestren lo aprendido hasta el momento.

Es pertinente realizar este proyecto de investigación porque en el ámbito de la Educación Matemática se ha puesto en evidencia la importancia de analizar los libros de texto, porque a grandes rasgos son el *vademécum* de las actividades que se generan y se propician en el aula de clase, de ahí como lo indica Choppin (1980) los libros de texto son *“un apoyo del saber, porque plantean una distribución jerarquía de los conocimientos, que colaboran a forjar los andamios intelectuales tanto de estudiantes como de docentes”* (Traducción propia de lo propuesto por Choppin, p.175); también se puede admitir, que éstos actúan como *“un instrumento de poder, dado que contribuyen de una u otra manera a la uniformidad lingüística de una disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes”* (Traducción propia de de lo propuesto Choppin, 1980), por lo tanto, los libros de texto son vistos como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje.

A causa de ello, desde la didáctica de las matemáticas se ha reflexionado bastante en estudiar los aportes que los libros de texto han tenido en la historia de la Educación Matemática, analizando la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia que estos tienen en el aula de clase y como la práctica educativa esta determinada por estos manuales, dejando huellas como objeto de estudio. Por esta razón, se considera que los libros de texto tiene el compromiso de apoyar al docente en la transformación del “saber sabio” en “saber escolar”, para que sea asequible a los estudiantes, como es bien sabido por algunos docentes, simplificando su

presentación inicial y tratando de buscar ejemplos, ejercicios y problemas que sean comprensibles y motiven a los estudiantes, con la intención de que ellos adquieran un conocimiento matemático.

Teniendo en cuenta estas indicaciones y los diferentes argumentos presentados en la revisión inicial de literatura, se genera un especial interés por examinar algunos libros de texto que hagan referencia al estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, porque se pretende analizar las relaciones entre la literatura, las orientaciones propuestas por el MEN, desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencia (2006), y lo que se presenta habitualmente en los libros de texto del grado décimo.

Este estudio previo, conduce a plantear interrogantes en torno a la estructura interna que tienen los libros de texto del grado décimo, especialmente en la temática concerniente a las relaciones trigonométricas, porque puede ser abordada desde una perspectiva variacional. Para ello, se ha formulado la siguiente pregunta:

- ¿Qué aspectos del pensamiento variacional se evidencian a través de algunos libros de texto del grado décimo, en el estudio de las relaciones trigonométricas?

## **Objetivos**

Para tratar de dar respuesta al interrogante anteriormente planteado, se determinan los siguientes objetivos:

## **Objetivo General**

Analizar las relaciones entre la literatura, las orientaciones propuestas por el MEN desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencia (2006), asociadas a un estudio variacional de la trigonometría y los desarrollos planteados en algunos libros de texto.

## **Objetivos Específicos**

- Analizar la presentación de las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas, en algunos libros de texto del grado décimo, desde una perspectiva variacional.
- Reconocer las ventajas y limitaciones que algunos libros de texto tienen frente al estudio de las relaciones trigonométricas, desde el punto de vista variacional.

# CAPÍTULO II

---

## MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presentan los fundamentos conceptuales que sustentan esta investigación, los cuales hacen referencia a las nociones que proponen algunos autores sobre el estudio del pensamiento variacional y cómo la tecnología a través del Software Geogebra puede aportar al desarrollo de dicho pensamiento. Para afrontar tal situación, se describen algunas consideraciones de cómo ha sido abordado el estudio del pensamiento variacional y se expone cómo el proceso de modelación puede permear el desarrollo de este pensamiento; además en este apartado se plantea porque es necesario observar los diferentes contextos en los cuales la noción de variación tiene presencia o no.

### **Elementos conceptuales que sustentan el estudio del pensamiento variacional**

Desde finales de la década de los noventa, en el campo de la Educación Matemática se ha observado continuamente el interés por analizar e interpretar los trabajos relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional y sus implicaciones didácticas a través del proceso de modelación. Al respecto, investigadores como: Cantoral y Farfán, 1998; Díaz, 2005; Reséndiz, 2006; Vasco, 2006; Posada y Villa-Ochoa, 2006 a; Villa-Ochoa y Ruiz, 2009; Villa-Ochoa y Ruiz, 2010; Villa-Ochoa, 2012; han planteado sus punto de vista, con la intención de que el concepto de variable sea percibido a través de fenómenos de cambio y variación, pues han



ofrecido algunas reflexiones “experimentales” sobre la necesidad de desarrollar este tipo de pensamiento en el aula de clase.

### **Algunas consideraciones sobre el pensamiento variacional**

En este apartado se exponen algunas interpretaciones del término *variación*. En primera instancia, está el trabajo de Cantoral y Farfán (1998), el cual considera la variación desde una perspectiva socio-epistemológica; pues estos autores proponen que el pensamiento y el lenguaje variacional es asumido como una línea de investigación, que analiza los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, no sólo en el sistema educativo, sino también en el medio social que cotidianamente los utiliza.

Para realizar dicho estudio, estos autores seleccionan y toman las variaciones desde un punto de vista matemático y fenomenológico, para analizar las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas que generan algún cambio. Para afrontar tal suceso, tuvieron en cuenta los problemas y situaciones que se plantean y se resuelven en lo social, a través de las variaciones y variables que se consideran en el aula de clase.

Desde esta perspectiva, se deduce que las relaciones entre las variables se establecen a partir del estudio de los fenómenos de variación, y las expresiones algebraicas son asumidas como una herramienta que posibilita la operatividad entre dichas variables, dado que éstas ayudan a

cuantificar los cambios que se experimentan, además la construcción de la noción de variable emerge de las relaciones entre al menos dos cantidades cambiantes que en la mayoría de los casos una de ellas es el tiempo.

De igual manera, el estudio realizado por Díaz (2005) se fundamenta en la misma línea de investigación anteriormente mencionada, porque reporta algunos hallazgos que se inscriben en lo propuesto por Cantoral y Farfán (1998). Esta autora, comienza analizando los modos de pensar que los estudiantes ponen en juego a la hora de abordar el estudio de la variación, para ello, plantea algunos cuestionamientos que redundan en *“aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de variación y aquellas de las matemáticas, que favorecen u obstaculizan los aprendizajes tendientes a la formación de un pensamiento variacional en los estudiantes y las estudiantes”* (p. 147).

El estudio desarrollado por Díaz (2005), pone en evidencia que tanto los estudiantes como los profesores y especialistas son portadores de una complejidad de *epistemes*<sup>2</sup>, porque muestran lo desafiante que es la construcción de ideas variacionales que dialoguen con cada una de las *epistemes* asociadas, originando redes de significados entre ellas. A partir de su estudio, esta autora describe las *epistemes* asociadas a la noción de variación: *visual de variación; representación del tiempo; y, una metáfora didáctica para lo inverso.*

En este contexto, es importante aclarar que la presente investigación denominada *el pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones*

---

<sup>2</sup> Según lo citado por Díaz (2005), para Foucault el concepto de Episteme se refiere al pensamiento de una época que gira en torno a las posibilidades que articulan aquello que será definido cómo lo Pensable, porque es allí donde se genera un espacio abierto para la discusión, que confluye indefinidamente en descriptible relaciones.

*trigonométricas* tomará de esta autora, el referente conceptual “*las epistemes estudiantiles de tiempo*” porque aparecen implícita o explícitamente en el marco de las representaciones cotidianas de la variación, dado que ostenta una naturaleza estática y discreta, dinámica y continua, estableciendo sentido en los elementos que entran en juego sobre la idea de variación, y esto solo depende de los niveles de abstracción que se generen en un contexto determinado (Díaz, 2005).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por la línea de investigación “pensamiento y lenguaje variacional”, Reséndiz (2006) también consolida sus indagaciones, debido a que centra su atención en analizar el papel que juega las explicaciones en clase de matemáticas cuando se intentan enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados con la noción de variación, específicamente el concepto de función. Para estudiar tal situación, considera que “*el discurso constituye el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social que se realiza en la escuela, por lo tanto construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente*” (p. 435).

Según las indagaciones realizadas por Reséndiz (2006), en el aula de clase es posible identificar cuatro formas diferentes que los profesores emplean para explicar la noción de variación, ellas son:

- En sus expresiones verbales con referencia a situaciones cotidianas, es decir, la noción de variación es aceptada como un “*modelo del lenguaje natural*”.

- Cuando emplean la tabulación como variación numérica, es decir, la noción de variación es asumida como un “*modelo numérico*”.
- Al momento de construir gráficas, como la variación de un punto de referencia, es decir, la noción de variación es considerada como un “*modelo de representación geométrica*”.
- Mediante el empleo de parámetros como variables principales, es decir, la noción de variación en este contexto es admitida como un “*modelo algebraico*”.

Desde esta perspectiva, se reitera una vez más que la noción de variable es abordada a partir de fenómenos de cambio y variación, pues en ella es posible construir conocimiento matemático, dado que los estudiantes pueden establecer relaciones e interactuar de manera conjunta con las diferentes formas de representar un concepto matemático a la luz de la variación, porque permite pasar de lo sensorial a lo perceptual y de esta manera llegar a constituirse en un objeto abstracto.

Por otra parte, están las investigación de Villa-Ochoa y Ruiz (2010), donde expresan que el estudio del pensamiento variacional constituye uno de los aspectos de mayor riqueza en el ámbito escolar, porque cotidianamente se establece a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas. Por tal razón, se considera que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificables, que son expuestas no sólo a través de procesos algebraicos sino también mediante gráficas y registros numéricos de tabulación.

## **Relación entre el pensamiento variacional y el proceso de modelación**

Una de las temáticas más importantes para abordar en la enseñanza de las matemáticas, desde el punto vista de la Educación Básica y la Educación Media en Colombia, es el desarrollo del pensamiento variacional. Para ello, el MEN presenta desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencia (2006) algunos elementos que posibilitan su identificación a través del estudio de la variación, porque afirma:

[el pensamiento variacional] tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (Colombia. MEN, 2006, p. 66).

Basado en esta descripción, Vasco (2006) afirma que los elementos implicados para el desarrollo de este pensamiento no son suficientemente claros y, por ende, lo asume en los siguientes términos, (ver Capítulo I, p. 21), y desde esta perspectiva, se puede considerar que el pensamiento variacional está relacionado con el proceso de modelación, a lo que bien señala este autor:

El objeto del pensamiento variacional es entonces la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones de tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (p. 139).

Esta idea, conduce necesariamente a expresar las razones de por que es conveniente emplear la modelación en las aulas de clase como recurso didáctico, que posibilita el aprendizaje de las matemáticas. Por eso, Colombia (1998) plantea que:

La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles (p. 101).

En este sentido, es importante aclarar que los procesos de modelación se refieren a la identificación de las matemáticas en un contexto general, al descubrimiento de relaciones y regularidades, al reconocimiento de aspectos comunes en diferentes situaciones, al hecho de representar una relación a través de una expresión algebraica, a utilizar diferentes modelos para solucionar un problema, de igual manera, se emplea la modelación cuando se trata de esquematizar, formular y visualizar un problema en sus diferentes formas de representación y cuando se hacen generalizaciones de una situación que permita observar la variación y el cambio (Colombia,1998).

Desde esta perspectiva, la implementación de la modelación en el aula de clase se ve influenciada por la capacidad del docente para identificar o diseñar situaciones del “mundo real” donde intervenga la variación y el cambio, para que el estudiante genere estrategias que le permitan su abordaje y, por ende, producir conocimiento matemático a través de ellos. En este sentido, Villa-Ochoa (2010) afirma:

La modelación matemática ha mostrado ser una herramienta útil en el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y los contextos propios de los estudiantes y las demás ciencias; sin embargo, para que dicho proceso desarrolle tales propósitos, se hace necesario un currículo que esté en coherencia con una ciertos principios de tipo filosóficos en los cuales el conocimiento matemático se observe como una construcción social en donde el estudiante se hace partícipe, y se apropia de él de una manera no compartimentalizada y multidisciplinaria (p. 170).

Todo este conjunto de ideas expuestas hasta el momento, según Villa-Ochoa (2010) trae consigo la exigencia de características como:

- Superar la visión de una organización “contenidista” es decir, ir más allá de un desarrollo lineal en el que los conceptos, definiciones, propiedades y algoritmos matemáticos tienen el papel protagónico.
- Tener una orientación hacia la resolución de problemas y la modelación que se conviertan en aspectos transversales al interior de las matemáticas.
- Promover un trabajo interdisciplinar que a su vez vaya más allá de la visión de las matemáticas que se pueden usar en otras disciplinas, para ubicarse en el análisis de fenómenos, situaciones o problemas que generan reflexiones y conocimiento en otras disciplinas de manera paralela (pp. 170 - 171).

Por otra parte, el término modelación es asumido como una actividad que involucra la construcción de modelos matemáticos, que son generados a partir de situaciones que representan problemas del “mundo real”; popularmente para didactizar estos modelos se utiliza en el aula de clase una serie de imágenes o gráficos, los cuales son usados como referencia para hacer más comprensible una idea o un concepto matemático que se esté abordando, de tal manera, que le brinde al estudiante herramientas para facilitar su apropiación y manejo. Por esta razón, Colombia (2006) afirma:

Un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginarios, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y a su vez, dar pistas seguras para avanzar hacia las demostraciones (p. 52).

De acuerdo con lo escrito hasta el momento, se tiene que la verdadera importancia de un modelo desde una perspectiva didáctica radica, según Bassanezi 2002 (citado por Posada y Villa-Ochoa, 2006 b, p. 74), en poseer un lenguaje claro y conciso para que proporcione información válida que posibilite encontrar su solución numérica. Por ello, se llama modelo matemático a un *“conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación”* (p. 67), por tal razón, una buena modelación implica el establecimiento de relaciones entre el contexto cotidiano, el contexto matemático y la habilidad para moverse en cada uno de ellos.

Para el desarrollo de la presente investigación es importante el proceso de modelación porque en los estudios de Vasco (2006) se considera que: *“los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso”* (p. 140). Debido a esta descripción, vale la pena aclarar que para resolver un problema cautivador primero se debe organizar un modelo de la situación inicialmente planteada, donde las variables covaríen en forma semejante y esto no se puede hacer sin activar previamente aquello que se denomina pensamiento variacional.

A causa de esto, Vasco (2006) propone una forma de esquematizar los problemas en varios momentos, a través del proceso de modelación, ellos son:



- Momento de captación de patrones de variación, es decir, identificar lo que cambia y lo que permanece fijo.
- Momento de creación de un modelo.
- Momento de echar a andar el modelo.
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado.
- Momento de revisión del modelo (p. 140).

También este autor expresa que si hay tecnología disponible que posibilite hacerlo, habría incluso otros momentos, que son: “Momento de formulación simbólica; momento de calcular con esa formulación; momento para comparar los resultados con el proceso modelado y momento de reformulación del modelo” (p. 140).

Por otra parte, se considera que uno de los dominios de investigación que mayor grado de consolidación ha desarrollado al interior de la Educación Matemática tiene que ver con el campo de las aplicaciones y la modelación matemática (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007). En particular, la modelación matemática llama especial atención sobre el papel de los contextos extra-matemáticos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas e impone a profesores y demás agentes educativos retos frente a la manera de articularlos en el aula de clase.

Sin embargo, el papel de los contextos extra-matemáticos en las aulas de clase no se circunscriben necesariamente a las miradas de la modelación matemática; según Beswick (2011) los términos “auténticos”, “vida real”, “situado” reflejan diferentes grados de distinción en la manera como se presentan los problemas, dado que se basan en símbolos matemáticos. A pesar de ello, esta autora apunta que el término “vida real” se asocia a enunciados verbales en los cuales la matemática se presenta en una oración o frase que proporciona mínima información

extra-matemática, en contraste, los términos “auténticos” y “situados” tiende a ser usados para transmitir una relación más fuerte.

El uso de tareas contextualizadas en el aula de clase se pueden justificar desde la literatura internacional; porque según Beswick (2011), en al menos cinco aspectos, a saber:

- 1 fines utilitarios que incluyen el cumplimiento de las necesidades económicas de la sociedad;
- 2 el uso de las matemáticas para mejorar la comprensión de los estudiantes de temas importantes;
- 3 mejorar la comprensión de los estudiantes de conceptos matemáticos;
- 4 intensificar la mutua apreciación de los estudiantes a la naturaleza de las matemáticas; y
- 5 mejorar el afecto de los estudiantes hacia las matemáticas.

En el mismo sentido, De Lange (1996, citado por Font, 2007), apunta cuatro razones para integrar los problemas contextualizados en los currículos; ellos son:

- 1 facilitan el aprendizaje de las matemáticas,
- 2 desarrollan las competencias de los ciudadanos,
- 3 desarrollan las competencias y actitudes generales asociadas a la resolución de problemas; y
- 4 permiten ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver tanto situaciones de otras áreas como de la vida cotidiana.

En un intento por clasificar los tipos de tareas contextualizadas, Font (2007) retoma el trabajo de Martínez para distinguir los siguientes tipos de contextos:

a) **Contexto real:** se refiere a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar. b) **Contexto simulado:** tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características (por ejemplo, cuando los alumnos simulan situaciones de compra-venta en un “rincón” de la clase. c) **Contexto evocado:** se refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho (pp. 437 - 438).

Basado en lo anteriormente expuesto, Font (2007) hace una diferencia particular entre los tipos de problemas contextualizados y los problemas escolares no-contextualizados (es decir, de contexto matemático). Según este autor, los problemas que más han interesado a la investigación didáctica han sido fundamentalmente los problemas de contexto evocado. Es en ese sentido que este investigador toma en cuenta la complejidad de los procesos necesarios para su resolución como un criterio para otra clasificación, la cual está compuesta básicamente por dos tipos de problemas que se encuentran en extremos opuestos, a saber, aquellos problemas contextualizados que se han diseñado para activar procesos complejos de modelización, mientras que en el otro extremo menciona los problemas relativamente sencillos cuyo objetivo es la aplicación de los conceptos matemáticos previamente estudiados.

### **El Pensamiento Variacional y la utilización del Software Geogebra**

La integración de las TIC a la enseñanza de las matemáticas han generado cambios sustanciales en la forma en que los estudiantes aprenden los conceptos y temáticas impartidas en

el aula de clase, puesto que actúan como simuladores para que los jóvenes construyan, reconstruyan, exploren y trasciendan con el conocimiento matemático, permitiéndole descubrir las estructuras invariantes que se generan por ejemplo, en una figura. Además, cuando se acondicionan herramientas tecnológicas a la enseñanza de las matemáticas, los estudiantes pueden centrar su atención en procesos que le sirvan ávidamente para tomar decisiones, las cuales se generan a través de la reflexión y deducción de las experiencias vividas con un determinado Software de Geometría Dinámica (SGD) y así, poder tener un referente para solucionar algunos problemas a los cuales se enfrente cotidianamente.

De este modo, se puede considerar que el uso de los diferentes SGD (i.e. Geogebra, Cabri Geometry II, Geometer's Sketchpad, Cinderella, MathGraph32, Wx Máxima, Regla y Compas) brindan la posibilidad de convertir el ambiente escolar en un laboratorio, donde se relacione la teoría con la práctica (Arcavi y Hadas, 2000), para que el estudiante logre un mejor desempeño en pro de potencializar el desarrollo de sus competencias básicas, lo cual sin duda alguna traerá como resultado el fortalecimiento en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de esta área del conocimiento. En este sentido, es importante resaltar que crear imágenes dinámicas de ideas matemáticas, favorecen el proceso de comprensión de las estructuras invariantes, las cuales más adelante son utilizadas para efectuar cálculos eficientes y precisos, tratando de resolver el problema que se le presente.

La situación anteriormente expuesta crea la impresión de que *“un aspecto notable en el uso de la tecnología, es que permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas, las cuales pueden ayudar al estudiantes en la visualización de relaciones*

*matemáticas*” (Santos, 2001 a. p. 59), porque en este contexto, los jóvenes tienen la oportunidad de mover partes de estas configuraciones y observar las invariantes que se producen en una construcción geométrica. Por medio del análisis de estas invariantes, el estudiante puede desarrollar conjeturas y al mismo tiempo, fortalecer los procesos de argumentación y proposición, los cuales se justifican en el hecho de diseñar pruebas y validarlas a través de una expresión algebraica.

Además con la utilización de los diferentes SGD, el estudiante puede crear variaciones específicas y efímeras de sus propias imágenes visuales, las cuales son producto de la exploración y construcción de los conceptos matemáticos, caracterizadas por ser eficientes y dinámicas; al respecto, Arcavi y Hadas (2000) afirman que:

Los ambientes dinámicos no solo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una imagen particular, y así estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones. (Traducción propia de lo propuesto por Arcavi y Hadas, pp. 25 - 26).

Debido a esta situación, también se considera que el uso de los diferentes SGD funcionan como *“una herramienta de gran utilidad para que los estudiantes participen en procesos de búsqueda y formulación de conjeturas o relaciones y argumentos o justificaciones matemáticas”* (Santos, 2001 b, p. 249). Sin embargo, ante la diversa variedad de SGD, se hace indispensable, no solo identificar los aspectos positivos que se generan en el estudiante durante la comprensión de los conceptos matemáticos, sino también caracterizar las representaciones, estrategias y

formas de razonamiento que son presentadas formalmente por ellos, como resultado de emplear tales herramientas en sus experiencias de aprendizaje.

Teniendo estas ideas en mente y tratando de acotar el tema de estudio, se encontró que el software Geogebra es asumido como una herramienta para potenciar el pensamiento variacional, ya ha sido tema de discusión por autores como Villa-Ochoa y Ruiz (2010) quienes señalan que en el diseño de situaciones para el aula de clase con auxilio del Geogebra se ponen de relieve diferentes aspectos asociados al pensamiento variacional, entre ellos: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia, construcción de herramientas, surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, refutación o demostración formal de las conjeturas.

El software Geogebra por generar un ambiente de Geometría Dinámica, se convierte en una herramienta que posibilita hacer visualmente explícito el *dinamismo implícito* de conceptos matemáticos; porque según Leung (2008) se entiende por *dinamismo implícito* aquellas actividades o razonamientos matemáticos que se emplean para comprender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de “animación mental”, de tal manera, que se puedan observar los patrones de variación o las propiedades invariantes de los objetos conceptuales que están siendo utilizados en ese momento.

Basado en lo anterior, se deduce que es posible analizar visualmente la variación de algunos elementos que intervienen en el estudio de las relaciones trigonométricas, mientras otros se mantienen constantes, es por esta razón, que Leung (2008) asume la variación como una *esencia*

*epistémica* de la modalidad de arrastre; su objetivo se ve reflejado en el hecho de *generar estrategias de arrastre para descubrir estructuras invariantes en medio de los diferentes componentes de una configuración, representación o construcción geométrica*.

Es así, como la Geometría Dinámica requiere de otras funcionalidades que son expresadas desde el pensamiento métrico o desde el pensamiento numérico, porque el software Geogebra utiliza constantemente el comando “elige y mueve”, *para acentuar los diferentes patrones de variación que pueden dar lugar a la aparición de patrones geométricos*. Las ideas anteriormente estudiadas, parecen generar ciertos *insights* sobre cómo la variación puede contribuir al estudio de esta rama de las matemáticas, porque proporciona descubrir escenarios distintos a los convencionales y observar algunas aplicaciones de la trigonometría fuera del ámbito escolar.

En este sentido, también es importante señalar que en las últimas décadas el adelanto tecnológico ha contribuido a modernizar y a enriquecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, porque en el aula de clase uno como docente siente la necesidad de abrir espacios para que los estudiantes exploren, resuelvan y comuniquen los conceptos matemáticos ya adquiridos, los cuales están expuestos a través de múltiples de representaciones (i.e. verbal, numérico, geométrico, simbólico y manipulativo), con el propósito de que ellos interactúen, reconstruyan y se apropien de este conocimiento para que lo apliquen en el momento que lo requieran; esta situación trae como consecuencia imprescindible en Geogebra la utilización de la visualización como medio para establecer conjeturas y comprender con facilidad un concepto matemático.

Los problemas de aplicación que habitualmente se plantean en trigonometría permiten explorar el potencial de Geogebra, porque este software establece presentaciones atractivas vinculadas a situaciones del mundo real para que se despierte en el estudiante el interés por aprender los conceptos matemáticos allí exhibidos, los cuales son proporcionados a través del análisis de las regularidades y la relación que se percibe entre los diferentes tipos de representación. Ahora el reto es diseñar actividades adecuadas en esta rama de las matemáticas y realizar estrategias pedagógicas para que la enseñanza y el aprendizaje con Geogebra sea un éxito; para lograr esto es necesario proyectar una didáctica que facilite la reflexión para que ellos verifiquen formalmente sus habilidades a través de las imágenes de forma y visualicen los razonamientos adquiridos mediante las ilustraciones dinámicas.



# CAPÍTULO III

---

## METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los fundamentos metodológicos adoptados en la realización de esta investigación; para ello, se ha seleccionado el *enfoque cualitativo de investigación*, dado que éste tiene como objetivo la descripción de un fenómeno que busca comprender una parte de la realidad, en este caso, analizar la manera como los libros de texto de matemáticas propician el desarrollo del pensamiento variacional, teniendo presente lo emanado por el MEN y las orientaciones planteadas desde la literatura. El *método* que se utiliza para orientar este proceso, es la *técnica del análisis de contenido*, fundamentado en el estudio de las ideas comprendidas en los textos escolares, a través de los mensajes en el marco de las relaciones “*emisor - receptor*”; y el cual ha sido aplicado a *algunos libros de texto del grado décimo* que presentan el estudio de las relaciones trigonométricas.

### Enfoque y método de investigación

La presente indagación está enmarcada en un *enfoque cualitativo de investigación*, el cual busca analizar e interpretar toda la información recogida, organizada, clasificada y comparada sobre el suceso de estudio, en este caso, analizar las relaciones existentes entre las orientaciones derivadas desde la literatura, lo emanado por el MEN desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencia (2006), asociadas a un estudio variacional de la

trigonometría y lo que habitualmente se presenta en el aula de clase a través de los libros de texto del grado décimo.

Como se mencionó en el párrafo anterior, para realizar este estudio se escogió el *enfoque cualitativo de investigación*, debido a que el investigador es quien plantea el problema; sin embargo, no sigue un proceso definido, sus planteamientos no son tan específicos como en el enfoque cuantitativo y las preguntas de investigación no siempre se han conceptualizado ni determinado por completo; en este enfoque, el investigador comienza examinando el mundo social y en este proceso desarrolla una teoría coherente con los datos, de acuerdo con lo que se observa, puesto que las investigaciones cualitativas van de lo particular a lo general (León et al., 2011).

Por otra parte, en la mayoría de los estudios cualitativos las hipótesis se generan durante el proceso; los métodos que se utilizan para la recolección de datos se basan en la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, registro de historias de vida,...; su propósito consiste en “reconstruir” la realidad, tal como la observan los actores que intervienen en ella y evalúa el desarrollo natural de los sucesos, porque el investigador no manipula ni estimula la “realidad” (León et al., 2011).

Es de anotar, que el enfoque cualitativo de investigación puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen el mundo “visible”, lo transforman y lo convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos, porque centrada su atención en el entendimiento del significado de las acciones de los seres

humanos y postula que la “realidad” se define a través de las deducciones que los participantes hacen de la investigación con respecto a sus realidades (León et al., 2011).

El *método* que se utiliza para desarrollar esta indagación, es el *análisis de contenido*; es de aclarar, que este método no hace referencia a la situación de observar y analizar el estilo (en términos de características, ilustraciones, encuadernación, facilidad para la comprensión lectora,...) que tienen los libros de texto, sino las ideas expresadas en él; porque según Pino y Blanco (2008), el análisis de contenido se puede considerar como una “*técnica de investigación que pretende dilucidar la naturaleza del discurso generado en una realidad social, la cual esta determinada a través de la producción documental sustentada en los libros de texto*” (p. 73).

Basado en esta descripción, se puede deducir que la *técnica del análisis de contenido* pretende generar razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados en cualquier tipo de lenguaje que exprese una comunicación (e. g: verbal, gráfico, simbólico), de tal manera, que sea posible analizar como los libros de texto del grado décimo presentan el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional.

Desde este punto de vista, el análisis de contenido cuenta con un marco de referencia que según Krippendorff (1990) posibilita comprender algunos conceptos que son necesarios tenerlos presente en el momento que se va a realizar una investigación, ellos son:

- Los *datos* son extraídos como tal por el investigador del lugar donde se encuentran.
- El *contexto* de los datos.

- La manera como el *investigador distribuye sus conocimientos* para comprender la realidad de los resultados encontrado en dicho estudio.
- El *objetivo* de la técnica del análisis de contenido.
- Los argumentos allí expuestos permiten darle fluidez a *las inferencias*, dado que son deducciones a partir de los resultados encontrados en dicho estudio.
- La *validez* o comprobación de las inferencias establecidas en dicho estudio, permiten credibilidad en la interpretación que se hizo de los datos.

Para tratar de sustentar esta idea, este autor propone que la finalidad de estos conceptos pertenecen a tres tipos, que son: *prescriptivo, analítico y metodológico*, argumentando:

Es *prescriptivo* en el sentido de que debe guiar la conceptualización y el diseño de los análisis de contenido prácticos en cualquier circunstancia; es *analítico* en el sentido de que debe facilitar el examen crítico de los resultados del análisis de contenido efectuado por otros; y es *metodológico* en el sentido de que debe orientar el desarrollo y perfeccionamiento sistemático de los métodos de análisis de contenido (Krippendorff, 1990, p. 36).

De acuerdo a lo expuesto por Krippendorff (1990), el análisis de contenido también requiere del cumplimiento de ciertas características que posibilitan su estudio:

- Buscar un significado simbólico a los mensajes.
- Considerar que los mensajes no tienen un solo significado, puesto que la interpretación que se haga de éstos es cualitativa; y que las ideas allí expuestas tratan de apreciar distintos fenómenos de aquellos que son observados.
- Examinar el contexto de los datos y conceptualizarlos de acuerdo a su realidad.

- Establecer ciertas inferencias que faciliten la toma de decisiones y comprobar su validez, de tal manera, que vayan más allá de lo descriptivo y genere razonamientos reflexivos que se relacionen con un contexto determinado.

Por otra parte, para implementar la *técnica del análisis de contenido*, Krippendorff (1990) recomienda tener presente lo siguiente:

- En todo análisis de contenido debe quedar claro cuáles datos se analizan y cuál es la población que permite extraer la información.
- Los datos son elementos básicos y constituyen la base que el investigador tiene para tratar de penetrarlos.
- La comunicación de los datos al investigador es unidireccional, en la medida en la que él es incapaz de manipular la realidad y poco será lo que la pueda influir.
- En todo análisis debe hacerse explícito el contexto con respecto al cual se analizan los datos (antecedentes, consecuencias,...).
- Como los intereses y conocimientos del investigador delimitan el contexto dentro del cual se harán sus inferencias, es importante que se conozca el origen de los datos y se manifiesten los supuestos acerca de ellos con los cuales se parte.
- Como se busca determinar inferencias aplicables a un contexto y que estas sean apropiadas, se hace necesario tener evidencias que justifiquen los resultados obtenidos, porque el análisis de contenido debe ser empíricamente útil, puesto que pretende hacer una contribución al conocimiento que es “objeto de estudio”.

## **Pertinencia de utilizar la técnica del análisis de contenido**

Para desarrollar la técnica del análisis de contenido Krippendorff (1990) propone las siguientes tres etapas básicas: *proyecto, ejecución, informe*.

El *proyecto*, por ejemplo es una etapa que se caracteriza por presentar una red de pasos analíticos mediante los cuales se procesa la información, da cuenta de la manera como se obtienen los datos y lo que se hace con ellos en el transcurso del análisis, y proporciona instrucciones a otras personas acerca de todo lo que se deben de hacer, si pretenden reproducir los resultados (Krippendorff, 1990, p. 70).

Para realizar esta etapa, Krippendorff (1990) plantea las siguientes acciones:

- **Aplicación del marco de referencia del análisis de contenido.** En esta acción el investigador debe buscar la comprensión entre las dos realidades observadas: una que hace alusión a los datos encontrados, en este caso, el tipo de actividades -llámense ejercicios, problemas o situaciones- que proponen algunos libros de texto del grado décimo sobre el estudio de las relaciones trigonométricas; y la otra es lo que se desea conocer, cómo los libros de texto del grado décimo hacen referencia al estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional.

En esta acción también se necesita tener claridad sobre el objetivo que se pretende alcanzar y señalar la población de estudio; para ello, el investigador reúne los datos de los

cuales se puede extraer la información que le sirva para inferir, de tal manera que pueda establecer conclusiones y recomendaciones (Krippendorff, 1990, p. 259).

- **Búsqueda de los datos adecuados.** En esta acción el investigador consigue los datos que manifiestan cierto acoplamiento con sus inferencias; sin embargo, es de resaltar que este proceso se puede hacer posterior a lo que inicialmente se había concebido en la investigación, porque podrían incluir cualquier dato que afectase normalmente su estudio (Solís, 2008).

- **Búsqueda del conocimiento contextual.** En esta acción es necesario contar con un referente conceptual (teorías, modelos, experiencias, datos representativos,...); una conexión empírica sobre lo que se quiere inferir; ubicar los datos en un contexto y convertirlos en fenómenos, para que con dicha información cree un puente destinado a expresar inferencias, porque según Krippendorff (1990) dicho referente conceptual es lo que posibilita al investigador situar los datos en un contexto adecuado y transformarlos en señales que le sirvan para formular inferencias.

- **Desarrollo de planes para determinar las unidades y el registro.** En esta acción el investigador determina la manera como es posible obtener los datos; establece las unidades de registro, localiza espacial o temporalmente dichas unidades, distingue el tipo de distribución de la información en la población estudiada.

Es de anotar, que el diseño de dicho plan tiene que ser minucioso y explícito con el objeto de estudio, porque *las unidades de análisis* constituyen segmentos del contenido de los mensajes, los cuales son caracterizados para ubicarlos dentro de unas categorías; porque estas unidades surgen de la interacción entre la realidad y el observador; pues son una función de hechos empíricos, de las finalidades de la investigación y de las exigencias que plantea dicha técnica (Solís, 2008). Para ello, se requiere lo siguiente:

- i. *Determinar las unidades de contexto.* Aquí el investigador reconoce y explica el hecho de los símbolos que determinan su interpretación, además extrae sus significados del medio en que se presentan.
- ii. *Definir las unidades de registro.* Según Krippendorff citando a Holsti: (1969, p. 116) una unidad de registro es “el segmento específico de contenido que se caracteriza al situarlo en una categoría determinada”, en otras palabras, las unidades de registro se asumen como el fragmento de la comunicación que se toma y sirve de base para el desarrollo de una investigación.
- iii. *Establecer las categorías de análisis.* Las categorías son los niveles donde están caracterizadas las unidades de análisis, no obstante, estas deben ser exhaustivas, es decir, comprende todas las posibles subcategorías de lo que se va a codificar, sin embargo, estas subcategorías deben ser mutuamente excluyentes, de tal manera, que una unidad de análisis pueda incurrir en una y solo una de las subcategorías de cada categoría (Krippendorff, 1990).



iv. *Determinar las unidades sintácticas.* Estas hacen referencia a las representaciones lingüísticas de palabras, términos, símbolos, frases, enunciados o párrafos, que se extraen del contenido de los mensajes, y que se caracterizan por ser unidades de enumeración, es decir, cuantificación de los datos.

• **Desarrollo de instrucciones para la interpretación de la información<sup>3</sup>.** En esta acción el investigador debe tener precaución de que las instrucciones estén basadas en concepciones promulgadas y puestas a prueba; además de revisar en la literatura si existen estudios previos o similares dentro del área en la cual se esté indagando, pues algunas veces se pueden describir nuevos datos. Si es así se retomarán las instrucciones de registros ya existentes y que con alguna modificación puedan ser utilizadas nuevamente (Solís, 2008).

Las instrucciones para la interpretación de la información, según Krippendorff (1990) deben:

- i. prescribir las características que han de reunir los observadores (codificaciones, jueces) empleados en el proceso de registro;
- ii. establecer la capacitación a que deben someterse esos observadores a fin de prepararse para la tarea;
- iii. definir las unidades de registro, incluyendo los procedimientos para su identificación;
- iv. delinear la sintaxis y la semántica del lenguaje de datos (variables, categorías), incluyendo en caso necesario un esbozo de los procedimientos cognitivos utilizados para situar los datos dentro de las categorías;
- v. describir de qué manera se han de utilizar y administrar las plantillas de datos (p. 259).

---

<sup>3</sup> Se ha utilizado la frase “interpretación de la información” en lugar de la palabra codificación debido a que este proyecto de investigación está enmarcado en una perspectiva más cualitativa que cuantitativa.

- **Búsqueda de procedimientos de análisis justificados según el contexto.** Según Krippendorff (1990) *“todo procedimiento analítico, implica ciertos supuestos acerca del contexto de los datos que deben defenderse a partir de lo que se conoce sobre este contexto”* (p. 260). En esta acción el investigador debe considerar el elemento que sensibiliza el fenómeno estudiado y los supuestos implícitos de hecho, porque en ocasiones resulta que el tipo de análisis empleado no es el más adecuado.
- **Establecimiento de las normas de calidad.** Según los estudios de Solís (2008) en esta acción “es indispensable contar con altas normas de calidad, las cuales se establecen antes de evaluar el análisis” (p. 180); de acuerdo a este contexto, es importante aclarar que existen dos tipos de normas: la *validez* y la *fiabilidad*.

La primera se caracteriza porque representa la medida en que la información es interpretada en forma correcta; es decir, que todo sea creíble. Para lograr la validez en un estudio se deben estimar dos elementos: la medida en que las conclusiones representan efectivamente la realidad; y si las ideas difundidas por el investigador representan o miden las categorías y subcategorías realmente allí identificadas. La segunda se refiere a la posibilidad de replicar estos estudios, porque al aplicar esta técnica a la misma información, el resultado deberá ser el mismo, y esto es lo que la convierte en objetiva y reproducible. Una manera de asegurar la fiabilidad es tener la certeza de que las categorías y subcategorías que se determinen incluyan el tipo de información que corresponde a este estudio (Solís, 2008).

La *ejecución* es una etapa donde se realiza lo planteado en el proyecto, generalmente es aquí donde se encuentran los problemas, porque muchos de ellos no fueron considerados por el investigador; lo recomendable es regresar y modificar el proyecto usando como guía el objetivo general de la investigación.

Según las investigaciones de Solís (2008) para realizar esta etapa, se plantean las siguientes acciones:

- Identificar y hallar las unidades de registro, las cuales deben ser reproducibles y satisfacer los criterios de validez semántica donde se apliquen.
- Reducir y transformar los datos, dándoles la forma que exige el análisis a la vez que reteniendo toda la información relevante.
- Analizar e identificar las pautas dentro de las inferencias, verificar las conjeturas concernientes a las relaciones entre éstas y los resultados obtenidos mediante la recolección de los datos, de tal forma, que se validen los hallazgos encontrados.
- Si existe algún problema con las categorías una posible solución es renombrarlas, puesto que podría suceder que éstas no estuvieran perfectamente definidas, con lo que el estudio perdería toda fiabilidad. Para rescatar el estudio se debe optar por eliminarlas o por recodificar los datos mediante otros instrumentos.
- En el momento de codificar los datos pueden presentarse una serie de problemas, como que los codificadores estén rescatando datos erróneos, o bien que las instrucciones en el registro no sean muy claras, lo que ocasionaría errores de interpretación entre un codificador y otro.

El *informe* es la etapa final del análisis de contenido, que se caracteriza por presentar una descripción de lo realizado, donde se plasman los motivos por los cuales se efectuó el análisis, el logro alcanzado y, sobre todo, su contribución al área de conocimiento que le corresponda.

Para realizar esta etapa, Solís (2008) recomienda proveer las siguientes acciones:

- Mencionar el problema general que aborda la investigación, informándole al lector la importancia del estudio.
- Exponer los antecedentes del problema. Se sugiere incluir una reseña bibliográfica acerca de cómo fue abordado el fenómeno de investigación. Deben consignarse los motivos que llevan a creer que se están ofreciendo nuevos hallazgos.
- Enunciar los objetivos específicos que pretendían alcanzarse por medio del análisis de contenido, mencionando la elección de los datos, métodos y diseños, en relación con el fenómeno que se estudió.
- Justificar por qué se eligieron determinados datos y diseños.
- Describir claramente los procedimientos adoptados que les permitan ser reproducibles.
- Presentar los hallazgos encontrados y su significado en el contexto del fenómeno estudiado. Además, si fuera el caso, los métodos de análisis que no resultaron ser los más adecuados para un estudio de dicha naturaleza.
- Incluir, a modo de resumen, una evaluación autocrítica del investigador que estuvo a cargo. La base de esto dependerá de si se alcanzó el objetivo planteado originalmente; y se describirán los elementos que no estaban contemplados y se enunciarán los resultados alcanzados en relación con la hipótesis planteada.

## **Aplicación de la técnica análisis de contenido a algunos libros de texto del grado décimo**

Después de haber descrito el proceso que se emplea para realizar la técnica del análisis de contenido, se presenta la manera como esta se asumió para analizar algunos libros de texto del grado décimo sobre el estudio de las relaciones trigonométricas, desde una perspectiva variacional.

### **Proyecto**

A continuación se desarrollan cada una de las acciones mencionadas anteriormente, es decir, lo expresado en el apartado que hace referencia a la pertinencia de utilizar la técnica del análisis de contenido.

- **Aplicación de un marco referencial del análisis de contenido.** Bajo esta acción se retoma la comprensión de dos realidades: una que hace referencia al tipo de actividades - llámense ejercicios, problemas o situaciones- que proponen algunos libros de texto del grado décimo sobre el estudio de las relaciones trigonométricas; y la otra, como los libros de texto del grado décimo hacen referencia al estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional.

De ahí que el objetivo de este proyecto de investigación sea analizar las relaciones existentes entre las orientaciones derivadas desde la literatura, lo emanado por el MEN desde los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencia (2006),

asociadas a un estudio variacional de la trigonometría y lo que habitualmente se presenta en el aula de clase a través de los libros de texto.

- **Búsqueda de los datos adecuados.** Se reunieron algunos libros de texto del grado décimo que incluyan en su tabla de contenido el estudio de las relaciones trigonométricas, pues estos se constituyeron en los elementos instrumentales sobre los cuales se procedió a la identificación de categorías y unidades sintácticas.

Para alcanzar el objetivo propuesto en esta investigación, se utilizaron como unidades físicas siete libros de texto del grado décimo que incluyen el estudio de las relaciones trigonométricas, los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencia (2006) y algunos documentos o artículos que hacen referencia a los estudios e investigaciones que se han desarrollado sobre la variación y la trigonometría, algunos de ellos presentados en los capítulos I y II de este proyecto.

La selección de los libros de textos para el grado décimo se hizo atendiendo a los criterios que se referencian a continuación: (i) que aparezcan en el Portal Colombia Aprende<sup>4</sup>, el cual ha sido diseñado por el MEN para que cualquier agente educativo pueda consultar información sobre las diferentes características que poseen los libros de texto que se comercializan en el país para la Educación Básica y Media, (ii) que se tenga evidencias de uso por parte de profesores de Educación Media y, finalmente, (iii) que desarrolle, de alguna

---

<sup>4</sup> El sitio web al cual se puede acceder al catálogo de textos escolares, recomendado por el MEN es: <http://www.colombiaprende.edu.co/html/home/1592/article-99610.html> Última consulta Enero 10 de 2013.

manera, los tópicos de la trigonometría que incluyan el uso de contextos extra-matemáticos en el estudio de las relaciones trigonométricas.

De acuerdo con los criterios establecidos anteriormente, se seleccionaron los siguientes libros de texto del grado décimo:

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Editorial
Buitrago, L; Romero, J; Ortiz, L; Gamboa, J; Morales, D; Castaño J.	2013	<i>Los caminos del saber Matemáticas 10</i>	Santillana
Sotero, F; Donaire, J; Hernández, J; Moreno, M; Serrano, E; Vizmanos, J.	2010	<i>Código Matemáticas 10</i>	Ediciones SM
Vergara, G; Rojas, C; García, O.	2009	<i>Misión Matemática 10</i>	Grupo Educar
Galindo, E; Cely, J.	2009	<i>Fórmula 10</i>	Voluntad S.A
Bautista, M; Ramírez, C; Chamorro, A; Romero, J; Torres, W.	2007	<i>Trigonometría, geometría analítica y estadística</i>	Santillana
Moreno, V.	2006	<i>Conexiones Matemáticas 10</i>	Norma
Alfonso, L; Salgado, D; Romero, J; Torres, W.	2004	<i>Trigonometría y geometría analítica</i>	Santillana

Tabla 9. Libros de texto seleccionados para realizar el segundo análisis sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.

- **Búsqueda del conocimiento contextual.** De acuerdo con lo expresado en el apartado consideraciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional, se resaltan algunas ideas que posibilitan sustentar conceptualmente como se realizó la técnica del análisis de contenido en los libros de texto seleccionados; estas son:

- i. cómo las *epistemes estudiantiles de tiempo* aparecen implícitamente o no en las actividades propuestas en los libros de texto del grado décimo sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.

ii. cómo la solución de *ejercicios* y “*problemas*” propuesto en los libros de texto seleccionados permiten abordar la noción de variación, a partir de las relaciones que se generan entre las diferentes formas que se emplean en el aula de clase para representar (e.g.: verbal, numérico, geométrico y algebraico) un concepto matemático, en este caso, aquellos que hacen referencia al estudio de las relaciones trigonométricas.

iii. cómo el uso de la tecnología a través del Software de Geometría Dinámica (e.g.: Geogebra) se propicia el desarrollo del pensamiento variacional.

En este sentido, también es importante destacar algunas ideas planteadas en el apartado que hace alusión al desarrollo del pensamiento variacional y a la utilización del Software Geogebra, porque permiten fundamentar con solidez el proceso que se realizó aplicando la técnica del análisis de contenido a algunos libros de texto del grado décimo; estas son:

i. cómo las actividades propuestas en los libros de texto seleccionados proporcionan un “acercamiento” a fenómenos de cambio y variación.

ii. cómo algunos elementos de la modelación trascienden en el uso de Software de Geometría Dinámica (e.g.: Geogebra), dado que le brindan la posibilidad a los estudiantes de que exploren, reflexionen, deduzcan, conjeturen y conceptualicen un saber, en este caso, aquellos que se desarrollan en el estudio de las relaciones trigonométricas.



iii. cómo la variación está en relación con los contextos y como estos a su vez, se plasman en ejercicios, problemas o situaciones que generalmente proponen los libros de texto del grado décimo.

Desde estas perspectivas, se analizaron algunas disposiciones planteadas desde la literatura, las orientaciones emanadas por el MEN, desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencia (2006); y se confrontaron estas formas sugeridas para abordar la noción de variación y el estudio de las relaciones trigonométricas con los libros de texto seleccionados.

Es de anotar, que cada libro de texto seleccionado se sometió a un análisis, en el cual se buscó evidencia que permitiera atender a las siguientes preguntas: ¿Cómo se desarrolla la temática de las relaciones trigonométricas?, ¿Cuáles aspectos dinámicos pone de relieve?, ¿Cuál es el uso que hace de las cantidades asociadas a relaciones trigonométricas? es decir, ¿Son tratadas como variables, parámetros o incógnitas? ¿Cómo los ejercicios y problemas propuestos en los libros de textos utilizan la variable tiempo, en el estudio de las relaciones trigonométricas?

De otro modo, es necesario aclarar que de ahora en adelante, se denominan bajo la categoría de tareas, a todas aquellas formas en que los libros de texto analizados proponen actividades para que los estudiantes profundicen en sus conocimientos, en concordancia con el estudio de las relaciones trigonométricas.

- **Desarrollo de planes para determinar las unidades y el registro.** Las unidades de contexto y de registro se determinaron con base en el contexto real; las categorías y las unidades sintácticas se generaron de acuerdo con la revisión de los libros de texto seleccionados para este estudio.

Las unidades de análisis que fueron utilizadas en este proyecto de investigación son:

- Unidades de contexto.* Luego de haber establecido las temáticas de interés, se procedió a realizar cada una de las tareas propuestas por los libros de texto seleccionados, donde se identificó los diferentes contextos a los cuales dichas tareas hacían referencia, con el propósito de reconocer en ellas algunos aspectos asociados al desarrollo del pensamiento variacional. De acuerdo con lo expresado por Font (2007), cada uno de los ejercicios y problemas propuestos fueron clasificados (ver tabla 12) en los siguientes contextos: matemático, evocado, simulado y real.
- Unidades de registro.* Estas estuvieron representadas por las temáticas de interés, que en los libros de texto seleccionados hacen referencia al estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, la ley del seno y la ley del coseno, donde ambas son abordadas a través del uso de los triángulos oblicuángulos.

La revisión de dichas unidades de análisis permitió establecer las *categorías y unidades sintácticas* que se tuvieron presente para aplicar en algunos libros de texto del grado décimo, la técnica del análisis de contenido.

i. *Categorías*. Se hizo una categorización del conjunto de tareas atendiendo a si obedecían a un contexto al interior de la matemática o si hacen alusión a contextos en otros escenarios (e.g.: de otras ciencias, la cotidianidad de los estudiantes,...), según lo descrito por Font (2007), buscando identificar en tales contextos algunos aspectos asociados al estudio de la variación (e.g.: uso de variables, covariación entre cantidades, entre otros) y la(s) estrategia(s) que se puedan usar para su solución. Es de anotar, que en este estudio se realizó un proceso de categorización emergente.

ii. *Unidades sintácticas*. En las tareas planteadas por los libros de textos analizados se encontraron palabras, ideas y expresiones que posibilitaban, según Font (2007) determinar el tipo de contexto al que pertenece dicha tarea, de igual modo, estos términos usados también permitieron hacer una nueva clasificación: de tareas estáticas y de tareas dinámicas.

Para el caso de este proyecto de investigación, denominado *el pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas*, en la tabla 10 se puede observar la relación entre las temáticas de interés, la primera categoría encontrada y las unidades sintácticas identificadas en cada una de las tareas propuestas por algunos libros de texto del grado décimo, estas son:

Temáticas de interés	Primera categoría	Unidades sintácticas encontradas
Razones trigonométricas		Presencia de palabras, en las actividades y ejercicios propuestos, como: lados, ángulos, segmentos, vértices, perímetro, área, cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa.
	Contexto Matemático	Presencia de enunciados como: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Halla los valores exactos para seno, coseno y tangente del ángulo <math>\theta</math> en cada triángulo.</li> <li>- Traza un triángulo para la razón trigonométrica dada y encuentra las otras cinco razones.</li> <li>- Resuelve los triángulos de acuerdo a la información dada.</li> <li>- Dibuja en tu cuaderno cada triángulo y resuélvelo.</li> </ul>
Ley del seno	Contexto Evocado	Presencia de palabras, en los ejercicios y problemas propuestos, como: altura, distancia, sombra, ancho, longitud, ángulo de elevación, ángulo de depresión, inclinación (pendiente), objetos externos (edificio, torre, árbol, poste, faro, pita, montaña, colina, cometa, globo, rio, lago, escalera, avión, barco, bote, tren, automóvil, casa,...). Descripción de personas realizando determinadas acciones (observando, caminando, montando bicicleta,...).
	Contexto Simulado	Utilización del tiempo en minutos y segundos, cinta métrica, goniómetro, computador, calculadora. Presencia de palabras, en las actividades propuestas, como: altura, distancia, sombra, ancho, longitud, ángulo de elevación, ángulo de depresión, inclinación (pendiente). Representación de las actividades a realizar por parte de: estudiantes, docentes, comunidad u objetos externos (automóvil, cometa, avión, barco, tren)
Ley del coseno	Contexto Real	Situaciones cotidianas que en cualquier momento podrían ocurrir, para ello, se requiere de la utilización del tiempo, cinta métrica, goniómetro, desplazamiento, computador, calculadora, estudiantes, docentes, y comunidad realizando alguna acción, objetos externos (edificio, casa, árbol, cometa, automóvil, avión, barco, tren). Presencia de palabras, en las actividades propuestas, como: altura, distancia, sombra, ancho, longitud, ángulo de elevación, ángulo de depresión, inclinación (pendiente).

Tabla 10. Relación entre las temáticas de interés, la primera categoría identificada y las unidades sintácticas encontradas, en los libros de texto seleccionados.

En la tabla 11, también se puede observar la relación entre la temática de interés, la segunda categoría y las subcategorías encontradas en la solución de cada una de las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas, en los libros de texto seleccionados. Estas son:

Temática de interés	Segunda categoría	Subcategorías
Razones trigonométricas	Tareas Estáticas	Aplicación directa
		Composición de razones
	Tareas Dinámicas	Seudo-dinámicas
		Comparación de estados
Ley del seno		Funcional - Geométrico
Ley del coseno		Directa
		Compuesta

Tabla 11. Relación entre la temática de interés, la segunda categoría encontrada y las subcategoría identificadas, en los libros de texto seleccionados.

- **Desarrollo de instrucciones para la interpretación de la información.** Para el desarrollo de esta acción es pertinente mencionar los estudios e investigaciones que se han realizado sobre la noción de variación (e.g.: Villa-Ochoa y Ruiz 2010), la trigonometría (e.g.: Kendal y Kaye, 1997; Orhun, 2001; Montiel, 2005), y el contexto (e.g.: Font, 2007) al que pertenecen las tareas propuestas por los libros de texto seleccionados, de tal manera, que sus aportes sirvieron como referente conceptual para establecer una clasificación de las categorías y subcategorías abordadas en este estudio.

Por otra parte, es de aclarar que esta acción no se realizó completamente, debido a que el desarrollo de las instrucciones necesitan de un estudio cuantitativo para poder ser reproducibles y válido en cualquier contexto (Krippendorff, 1990). Dada esta situación, este proyecto de investigación denominado “el pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas” no hizo una codificación más allá de etiquetar cada una de las tareas propuestas en estáticas o dinámicas, identificando el tipo de contexto al que hace refiere (matemático, evocado, simulado, real) para después proceder

con un análisis de frecuencia que permitiera realizar la emisión de diferentes juicios de valor.

- **Búsqueda de procedimientos de análisis justificados según el contexto.** Para realizar el análisis de los textos escolares seleccionados se procedió a hacer una revisión de las tablas de contenido de cada uno de ellos, para determinar la ubicación de la temática de interés en relación con los temas que se abordan previa y posteriormente en el texto.

Seguidamente se hizo una revisión del contenido de las secciones para determinar las maneras en que se presenta el estudio de las relaciones trigonometrías, sus ejemplos, demostraciones y secuencias de actividades. Esta revisión arrojó que generalmente, los libros de texto analizados inician cada temática con una introducción de la misma, para ello, proponen un taller de comprensión lectora, que está fundamentado desde una breve reseña histórica sobre hechos y personajes que tuvieron una incidencia en la elaboración de dicho concepto; para luego explicar las definiciones y propiedades (algunas demostradas) con algunos ejemplos y, finalmente, se da un espacio para ejercicios y problemas de aplicación. Es este espacio, es donde se encuentran algunos *problemas contextualizados evocados de aplicación* (Font, 2007).

De otro modo, las tareas propuestas en los libros de texto analizados hacen un uso más recurrente de enunciados verbales de contexto evocado, en los cuales hay una aplicación (casi) inmediata de los procedimientos y expresiones algebraicas previamente abordadas en el contenido de los capítulos. También se discute sobre la necesidad de trascender este tipo

de tareas y contextos hacia tareas más “auténticas” que aborden la complejidad que se implica en el estudio de la variación y la trigonometría plana.

- **Establecimiento de las normas de calidad.** Como se estableció en el apartado denominado pertinencia de utilizar la técnica del análisis de contenido, las normas de calidad fueron la “validez” y la “fiabilidad”. Con el propósito de alcanzar un estándar de validez dentro de la investigación, se decidió en primera instancia, realizar el análisis sobre un conjunto de libros de texto del grado décimo percibidos como fuentes confiables para la recolección de la información necesaria. Del mismo modo, se planteó como estrategia a seguir, realizar una clasificación de las tareas propuestas en dichos libros de acuerdo al tipo de enunciado empleado y al contexto al que cada una de ellas hace referencia, encontrando como resultado la *verificación* de la hipótesis inicial respecto a la manera de abordar el estudio de pensamiento variacional dentro del aprendizaje de las relaciones trigonométricas, lo cual ha confirmado, de cierta manera, lo expuesto por Krippendorff (1990) “*un análisis de contenido es válido en la medida en que sus inferencias se sostengan frente a otros datos obtenidos de forma independiente*” (p. 228).

En el caso de la *fiabilidad*, se logró derivando las categorías a través de algunas ideas plasmadas en el apartado que hace referencia a la relación entre el pensamiento variacional y el proceso de modelación; así mismo, para que hubiera una mayor credibilidad, a cada categoría se le encontró su frecuencia, dependiendo del contexto al que hace referencia y de las expresiones algebraicas que se utilizan para darle solución a dichas tareas propuestas.

## **Ejecución**

El proceso de ejecución fue largo y minucioso, porque se realizaron y se analizaron cuidadosamente las tareas propuestas en algunos libros de texto del grado décimo sobre el estudio de las relaciones trigonométricas. En un primer momento se observó que algunas instituciones educativas usan los textos escolares que en el mercado se sugieren para abordar la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, es por esta razón, que se decidió realizar una búsqueda adicional que estuviera fundamentada en hacer consultas a profesores de matemáticas del grado décimo sobre el tipo de texto que utiliza para orientar sus clases y se estudiaron algunas mallas curriculares propuestas para éste grado.

En un segundo momento se realizaron todas las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en cada uno de los libros de texto seleccionados, de tal manera, que se registraron mediante tablas los resultados allí encontrados, para ello se hizo necesario determinar las unidades sintácticas que intervienen en este estudio, dado que estas permitieron identificar un contexto al cual dicha tarea hace referencia, posibilitando así la forma de establecer la frecuencia de las categorías encontradas. Por otra parte, el proceso que se emplea para determinar la solución de tales tareas, también permitió hacer una nueva clasificación, puesto que para ser resueltas requieren de una interpretación estática o dinámica de los elementos involucrados en dichas tareas; de igual modo, a estas subcategorías identificadas se le encontró su frecuencia.



En la tabla 12 se observa la frecuencia de tareas que usan los libros de textos analizados, de acuerdo con la referencia si pertenecen a un contexto matemático, o a un contexto evocado, o a un contexto simulado o a un contexto real (Font, 2007).

Tipo de problema Nombre del texto	Contexto Matemático	Contexto Evocado	Contexto Simulado	Contexto Real
<i>Los caminos del saber Matemáticas 10</i>	75	33	0	0
<i>Código Matemáticas 10</i>	18	12	0	0
<i>Misión Matemáticas 10</i>	21	33	0	0
<i>Fórmula 10</i>	30	69	0	0
<i>Trigonometría, geometría analítica y estadística</i>	45	18	0	0
<i>Conexiones Matemáticas 10</i>	48	42	0	0
<i>Trigonometría y geometría analítica</i>	15	18	0	0

Tabla 12. Frecuencia de tareas que usan los libros de textos analizados, de acuerdo con el contexto al cual pertenece.

Estos resultados iniciales impusieron en los investigadores un reto adicional para observar los aspectos que en tales tareas pudieran asociarse a características del pensamiento variacional, pues ante la ausencia de tareas en contextos “reales” o “simulados”, porque la variación estaría o no implicada en contextos “evocados” o “matemáticos” en los cuales, por su naturaleza, el estudio de la variación podría resaltar u opacar algunas de sus características.

En la tabla 13 se observa la frecuencia de tareas que usan los libros de textos analizados, de acuerdo a si son tareas que requieren para su solución una interpretación estática o dinámica.

Nombre de los libros de texto	Tareas estáticas		Tareas dinámicas			
	Aplicación directa	Composición de razones	Pseudo-dinámicas	Comparación de estados	Funcional - Geométrico	
					Directa	Compuesta
<i>Los caminos del saber Matemáticas 10</i>	36	69	2	1	0	0
<i>Código Matemáticas 10</i>	9	21	0	0	0	0
<i>Misión Matemática 10</i>	24	30	1	0	0	0
<i>Fórmula 10</i>	33	60	5	1	0	0
<i>Trigonometría, geometría analítica y estadística</i>	27	36	0	0	0	0
<i>Conexiones Matemáticas 10</i>	40	50	0	0	0	0
<i>Trigonometría y geometría analítica</i>	12	21	0	0	0	0

Tabla 13. Frecuencia de tareas que usan los libros de textos analizados, de acuerdo a la manera como son solucionados.

## Informe

Al analizar las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en algunos libros de texto del grado décimo se encontraron ciertas regularidades que permiten inferir lo siguiente:

La mayoría de las tareas están diseñadas para que el estudiante, calcule el valor numérico de una distancia, de una altura o de un ángulo en un triángulo, en el cual los demás datos están dados (ver resultados obtenidos de este estudio). Así mismo, se desaprovechan los contextos de los problemas planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen; en otras palabras, las medidas a determinar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como

cantidades variables sobre las cuales se pueden establecer ciertas relaciones funcionales (Tavera y Villa-Ochoa, 2012).

De otro modo, también se observa que el “contexto matemático” ocupa la mayor parte de las tareas propuestas en los libros de texto analizados, sin embargo, al no haber tareas donde se registre el uso de contextos simulados o reales, el “contexto evocado” es el que más se ajusta a situaciones donde se puedan evidenciar eventos dinámicos, aunque difícilmente se presenta la relación funcional entre los lados y los ángulos de un triángulo (ver resultados obtenidos de este estudio). Estos hallazgos ponen de relieve la necesidad de establecer nuevas relaciones, en las cuales los conceptos matemáticos (en este caso, aquellos que permiten el estudio de las relaciones trigonométricas) se observen de una manera dinámica, para que los estudiantes puedan describir, interpretar, predecir, cuantificar y modelar las situaciones que se le plantean.

En los libros de texto del grado décimo analizados se encontró que la mayoría de las tareas propuestas sobre las razones trigonométricas, se resuelven empleando la *tangente*, puesto que en ellas se establece una relación directa entre el cateto opuesto, cateto adyacente y ángulo de estudio; donde el valor numérico de la primera cantidad actúa por lo general, como incógnita y las otras dos cantidades están determinadas por la tarea planteada (ver resultados obtenidos de este estudio).

En este sentido, también aparecen algunas tareas que para ser solucionadas requieren de la razón trigonométrica *seno*, donde hay que hallar el valor de la hipotenusa, que igualmente se muestra como incógnita, pues la tarea propuesta expone el valor numérico al que equivale el

cateto opuesto y el ángulo de estudio. Es de anotar, que en ambos casos, las cantidades que allí intervienen son datos fijos, los cuales no permiten propiciar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas.

La solución de las tareas propuestas por los libros de texto seleccionados sobre el estudio de las relaciones trigonométricas que hacen alusión a un contexto evocado, permiten establecer la relación que puede existir entre las diferentes formas que se emplean en el aula de clase para representar un concepto matemático (e.g.: verbal, numérica, geométrica, algebraica), dado que los estudiantes deben *entender y comprender el problema que se plantea*, para luego tratar de *graficar lo allí expuesto*, de tal manera que logren visualizar en qué lugar se encuentran los datos proporcionados por dicha tarea y aquel(los) que debe hallar, y finalmente determina una *expresión algebraica* que a través del manejo *apropiado de algunas propiedades* le permite calcular el valor numérico que satisface completamente la tarea planteada.

Las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en los libros de texto analizados hacen referencia a un *contexto matemático* o a un *contexto evocado*, los cuales se caracterizan por ser de “*naturaleza estática*”, a lo que Montiel (2005) denomina “matematización de la astronomía”, porque en estos contextos los estudiantes hipotéticamente deben medir y calcular un dato, por lo tanto, se considera que este tipo de tareas se reduce a la forma de hallar valores de una incógnita, razón que poco favorece las relaciones funcionales o dinámicas entre las cantidades.

En diferentes ponencias presentadas por Tavera y Villa-Ochoa (2012, 2013) sobre el pensamiento variacional, el estudio de las relaciones trigonométricas y el uso del Software Geogebra, se evidenció que los programas computacionales de Geometría Dinámica son herramientas importantes para resaltar las nociones de tipo variacional, porque brindan la posibilidad de vivenciar de manera experimental los conceptos y propiedades que hace poco solo se manejaban desde el papel bajo ideas en abstracto, debido a que era imposible observar el desplazamiento o trayectoria que tuviera un elemento que conforma la representación gráfica de la tarea abordada. En este sentido, el hecho de identificar y de hacer un análisis de las estructuras invariantes, le permite al estudiante desarrollar conjeturas y al mismo tiempo, fortalecer los procesos de argumentación y proposición, los cuales se justifican desde el diseño de pruebas y su validación a través de una expresión algebraica (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010).

# CAPÍTULO IV

---

## HALLAZGOS ENCONTRADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos después de haber realizado y analizado completamente todas las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en algunos libros de texto del grado décimo, con el propósito de identificar como éstas propician el desarrollo del pensamiento variacional, teniendo presente las orientaciones derivadas de la literatura junto con lo planteado por el MEN, desde los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencia (2006).

Es de anotar, que la información presentada en las tablas 12 y 13 permite colegir que en estos libros de texto privilegian las tareas en contextos matemáticos o evocados y, por ende, están asociadas, a un conjunto de enunciados de tipo verbal, los cuales utilizan cierto tipo de *realismo hipotético* en el que queda “transparente” cualquier situación que haga referencia a que se produzca en la “realidad”, es decir, situaciones de modelación matemática como las descritas en Villa-Ochoa y Jaramillo (2011). Estos resultados iniciales impusieron en los investigadores un reto adicional para observar los aspectos que en tales tareas pudieran asociarse a características del pensamiento variacional, pues ante la no presencia de tareas en contextos “reales” o “simulados”.

Al analizar las tareas propuestas en los libros de texto seleccionados se observó que en ellas se reconocen las relaciones que existen entre las cantidades (variables o no), obteniendo como resultado dos tipologías de tareas. En la primera de ellas, las razones trigonométricas se presentan para calcular “cantidades fijas” desconocidas (incógnitas) a partir de datos presentados en el enunciado; y en la segunda, en cambio, se hace uso de las razones para describir alguna relación de tipo variacional entre cantidades. A continuación se presenta una descripción más detallada de las tipologías de tareas encontradas, así como algunos ejemplos para cada caso.

### **Tareas con interpretación “estáticas” de las razones trigonométricas**

En esta tipología se caracterizan aquellas tareas en las cuales los contextos no parecen asignar un papel fundamental a la noción de variación y/o variable (cimiento del pensamiento variacional) en la interpretación o solución de la tarea propuesta. Como se mencionó anteriormente, este tipo de contextos privilegia el cálculo de cantidades que, generalmente, se asocian a incógnitas (valores fijos aunque desconocidos) y no a variables ni a funciones. En los libros de texto analizados también fue posible establecer diferentes sub-tipologías de tareas pertenecientes a esta tipología, de acuerdo con el uso de contenido matemático exigido en la solución de dicha tarea. A continuación se presenta algunas de estas sub-tipologías.

#### **Tareas por aplicación directa de una razón (estática)**

Para solucionar las tareas asociadas a esta sub-tipología, los estudiantes deben reconocer primero cuál es la razón trigonométrica (raz: seno, coseno, tangente, cotangente, secante,

cosecante) que se inscribe en la solución de dicha tarea; y una vez identificada, el resto de la solución implica la aplicación de algunas propiedades algebraicas. Debido a esta situación, se representa esta sub-tipología de tareas bajo la siguiente estructura:  $raz(\alpha) = \frac{a}{b}$ , donde *raz* representa a cualquiera de las seis razones trigonométricas y los símbolos *a* y *b* hacen alusión a las dos cantidades (no variables), de las cuales una de ellas es la incógnita y la otra es el valor numérico *dado* que permite resolver “satisfactoria y de manera inmediata” la tarea planteada.

A continuación, se presenta uno de los enunciados extraído de uno de los libros de textos analizados que ejemplifican esta sub-tipología de tareas:

*¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta un edificio de 120 metros de altura, cuando el Sol presenta un ángulo de elevación de  $35^\circ$  desde la azotea del edificio?*

La representación gráfica de esta tarea es:

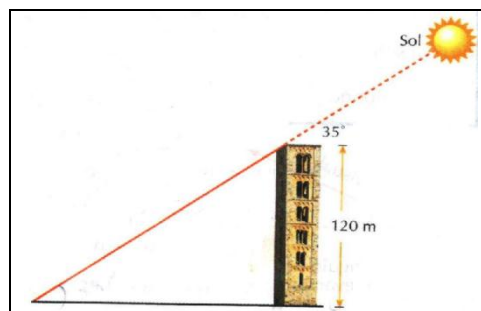


Ilustración 3. Imagen tomada del libro de texto “Conexiones matemáticas 10”  
Moreno (2006, p. 22).

De acuerdo a la interpretación que se hace del enunciado y a la representación gráfica de la tarea se tiene que el ángulo BAC mide  $35^\circ$ ; el  $\overline{BC}$  representa la altura del edificio, los cuales se caracterizan por ser datos conocidos; y el  $\overline{AB}$  representa la longitud de la sombra del edificio, que



hace referencia a la incógnita, por lo tanto, este enunciado obedece a la siguiente expresión algebraica:

$$\tan 35^\circ = \frac{120 \text{ m}}{\overline{AB}}$$

Tanto desde el enunciado mismo, como desde la expresión algebraica y grafica que lo representa, se observa la presencia de unas cantidades fijas conocidas que se distinguen por ser constantes (e.g.: ángulo de elevación y altura del edificio) y una desconocida que es la solicitada (e.g.: la longitud de la sombra del edificio). Esta sub-tipología de tareas permite valorar la capacidad del estudiante para asociar una relación trigonométrica con los datos presentados en el enunciado y, a su vez, utilizar algunas técnicas algebraicas para encontrar un resultado; sin embargo, como se argumentara más adelante, esta sub-tipología de tareas no trasciende a una interpretación de las razones trigonométricas como funciones, ni a las cantidades que intervienen en ellas (ángulos y los segmentos del triángulo) como variables.

### **Tareas por composición de razones (estáticas)**

Esta sub-tipología de tareas encontrada en los libros de texto analizados requiere de la aplicación de dos o más razones trigonométricas (no consideradas como variaciones) para calcular los valores solicitados. Estos obedecen a la siguiente estructura:

$$raz_1(\alpha_1) = \frac{a_1}{b_1}, \quad \dots \quad raz_2(\alpha_2) = \frac{a_2}{b_2} \quad \dots \quad raz_n(\alpha_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

Donde  $raz_1, raz_2, \dots, raz_n$  representa a cualquiera de las seis razones trigonométricas y los símbolos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n$  representan cantidades (generalmente no entendidas como variables) de las cuales algunas de ellas son las incógnitas y las otras son valores numéricos dados. En la resolución de la tarea, se presentan adicionalmente algunas condiciones que permitan relacionar las  $a_i$  con alguna otra cantidad (sea de la forma  $a_j$  o  $b_k$ ), de tal manera que posibilite solucionar la tarea planteada. La expresión  $raz_n$  también puede referirse a la necesidad de utilizar la denominada “ley del seno” o “ley del coseno” y así poder resolver los cuestionamientos de la tarea propuesta.

A continuación se presenta uno de los enunciados extraído de uno de los textos analizados que ejemplifican esta sub-tipología de tareas:

*Una columna se desplomó sobre otra partiéndola en dos, como muestra la figura. Las dos columnas estaban separadas 12 metros entre sí, y de las partes que quedaron en pie, se sabe que la longitud de la más pequeña es los dos tercios de la más grande. ¿Cuál es la medida de las dos partes de columna que quedaron en pie? ¿Cuál era la altura de la columna que se cayó por el desplome de la otra?*

La representación gráfica de esta tarea es:

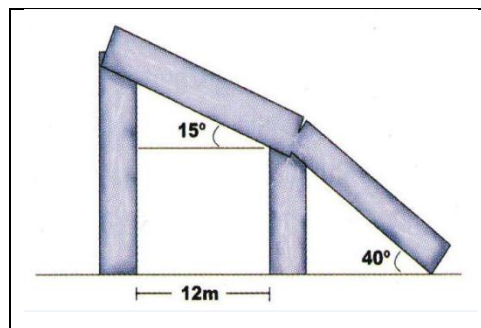


Ilustración 4. Imagen tomada del libro de texto “Fórmula 10” Galindo y Cely (2009, p. 89).

De acuerdo a la interpretación que se hace del enunciado y a la representación gráfica de la tarea se tiene que el  $\overline{AE}$  representa la distancia que hay entre las dos columnas; el  $\overline{DE}$  representa la parte que quedo de pie de la columna que se partió y la medida de este segmento es igual al  $\overline{AB}$ ; el  $\overline{BC}$  representa la parte mas alta de la columna que se desplomo; el  $\overline{CD}$  representa la parte de la longitud de la columna que se desplomo, la cual forma un ángulo de  $15^\circ$  con la parte que quedo de pie de la otra columna; el  $\overline{DF}$  representa una parte de la longitud de la columna que se partió, la cual forma un ángulo de  $40^\circ$  con el suelo.

Utilizando la notación anteriormente expuesta, se tiene que  $a_1 = \overline{BC}$ ,  $a_2 = \overline{DE}$  y  $b_2 = \overline{DF}$ , por lo tanto, este enunciado obedece a las siguientes expresiones algebraicas:

$$1. \quad \tan 15^\circ = \frac{\overline{BC}}{12 \text{ m}} \qquad 2. \quad \overline{AB} = \frac{2}{3}(\overline{BC} + \overline{AB}) \qquad 3 \quad \sin 40^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$$

Lo cual permite resolver con entera “satisfacción” la tarea propuesta. Esta sub-tipología de tareas permite apreciar la capacidad del estudiante para asociar una razón trigonométrica con los datos presentados en el enunciado y, a su vez, utilizar algunas técnicas algebraicas para encontrar un resultado determinado; sin embargo, esta sub-tipología de tareas tampoco trascienden a una interpretación de las razones trigonométricas como funciones, ni a las cantidades que intervienen en ellas (ángulos y los segmentos del triángulo) como variables.

### **Tareas con interpretación “pseudo-dinámica” de las razones trigonométricas**

Esta tipología de tareas se cimenta en la presentación explícita o implícita de unas cantidades que se caracterizan por ser “variables”. De esta manera, el enunciado se refiere a los

problemas propuestos, los cuales describen situaciones “aparentemente dinámicas” o “variacionales” que generan algún cambio, sin embargo, los movimientos allí producidos se limitan a reducir la tarea a preguntas por un valor numérico en particular que satisface dicho problema.

A continuación se presenta uno de los enunciados extraído de uno de los textos analizados que ejemplifican esta tipología de tareas:

*Un vehículo se desplaza por una carretera de oeste a este, al pasar por el punto A divisa una antena repetidora de televisión con un ángulo de elevación de  $35^\circ$ . Momentos antes de entrar en el túnel y cuando ha recorrido 800 metros, la antena se divisa con un ángulo de elevación de  $42^\circ$ ; si el vehículo cruza el túnel en línea recta, ¿Cuál será la menor distancia por la que pasara respecto a la base de la antena?*

La representación gráfica de esta tarea es:

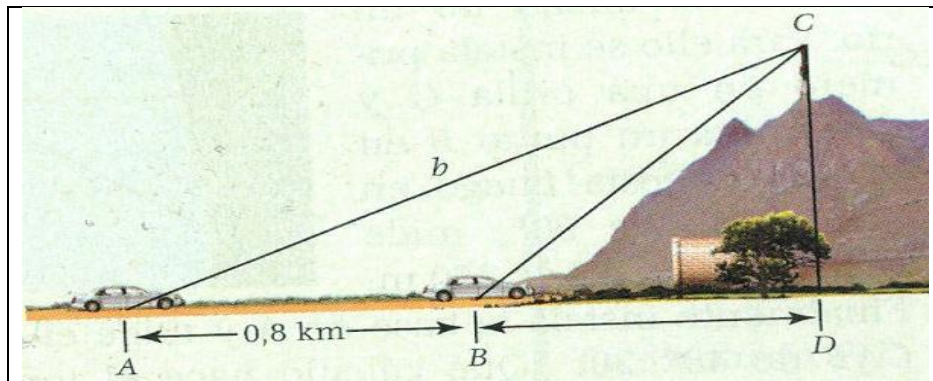


Ilustración 5. Imagen tomada del libro de texto “Trigonometría, geometría analítica y estadística”  
Bautista et al., (2007, p. 96).

De acuerdo con la interpretación que se hace de este enunciado y con la representación gráfica de dicha tarea se tiene que el  $\overline{AC}$  representa la primera línea visual del observador hacia la antena, la cual forma con el suelo un ángulo de  $35^\circ$ ; el  $\overline{BC}$  representa la segunda línea visual del

observador con la antena, la cual forma con el suelo un ángulo de  $42^\circ$ ; el  $\overline{AB}$  representa primera distancia recorrida por el vehículo, estos datos se caracterizan por ser conocidos en el problema; el  $\overline{DC}$  representa la altura de la antena; el  $\overline{BD}$  representa la distancia que hay entre el vehículo y la base de la antena, estos datos hacen referencia a las cantidades desconocidas, por lo tanto, este enunciado obedece a las siguientes expresiones algebraicas:

$$1 \quad \tan 35^\circ = \frac{\overline{DC}}{800 + \overline{BD}}$$

$$2 \quad \tan 42^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}}$$

Después de plantear este sistema de ecuaciones lineales ( $2 \times 2$ ), se observa que es necesario resolver una tercera expresión algebraica, para obtener así el valor numérico del  $\overline{BD}$ , el cual hace mención a la distancia que tiene que recorrer el vehículo para llegar a la base de la antena:

$$3 \quad \overline{BD} = \frac{800 \times \tan 35^\circ}{(\tan 42^\circ - \tan 35^\circ)}$$

Después de obtener este resultado, se requiere sustituir esta cantidad en la ecuación 1 o en la ecuación 2 y así conseguir el valor numérico del  $\overline{DC}$ , el cual hace alusión a la altura a la que se encuentra la antena. Esta tipología de tareas también permite identificar la habilidad del estudiante para asociar una relación trigonométrica con los datos presentados en el enunciado y, a su vez, utilizar algunas expresiones algebraicas para encontrar un resultado; no obstante, este tipo de tareas tampoco pueden asumirse como una interpretación de las razones trigonométricas desde el punto de vista de las funciones, ni a las cantidades que intervienen en ellas (ángulos y los segmentos del triángulo) como variables.

## **Tareas con interpretación “dinámica” de las razones trigonométricas**

En esta tipología se caracterizan aquellas tareas que permitan ser abordadas a partir de fenómenos de cambio y variación, donde la noción de variable se perciba de manera explícita, para que los estudiantes analicen visualmente la variación de algunos elementos que intervienen en el estudio de las relaciones trigonométricas, mientras otros se mantienen constantes. Es de anotar que en los libros de texto analizados se encontraron pocas tareas que hagan referencia a esta tipología; sin embargo, a continuación se presentan algunas tareas que posibilitan ser afrontadas desde diferentes sub-tipologías:

### **Tareas por comparación de estados (dinámica)**

Para afrontar esta sub-tipología de tareas, los estudiantes deben identificar cantidades que varían, en su solución atienden al reconocimiento de un “cambio promedio” descrito en un estado inicial y un estado final. Según las tareas planteadas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas se puede distinguir y establecer tres cantidades: inicial, final y de cambio o diferencia entre la inicial y la final (o viceversa), lo cual permiten pensar en ideas de la noción de variable.

A continuación se presenta uno de los enunciados extraído de uno de los textos analizados que ejemplifican esta sub-tipología de tareas:

*Un espectador observa a un motociclista desde un punto A de un puente, ubicado a 5 metros de altura con respecto a una carretera recta. Si en un instante el ángulo de depresión varía de  $20^\circ$  a  $40^\circ$ , ¿Qué distancia recorre el motociclista en este periodo de tiempo?*

La representación gráfica de esta tarea es:

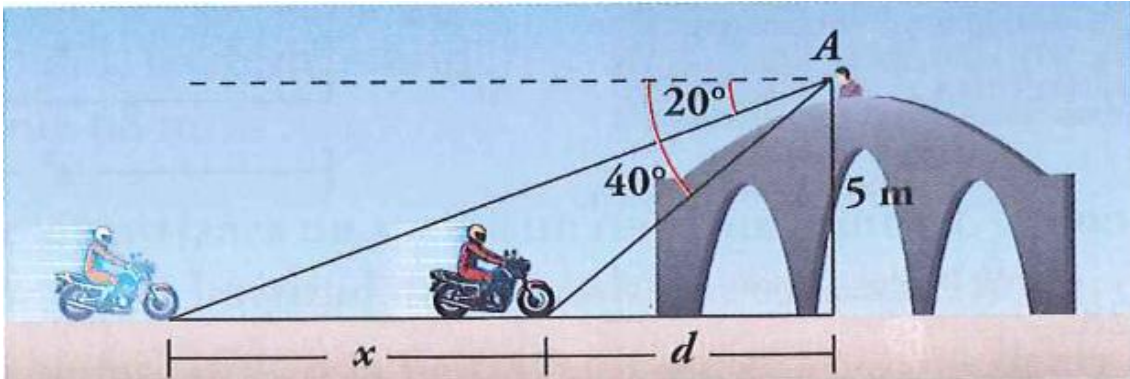


Ilustración 6. Imagen tomada del libro de texto “Los caminos del saber Matemáticas 10”  
Buitrago et al., (2013, p. 108).

Según la representación gráfica de la tarea propuesta, se tiene que la expresión  $x + d$  representa la distancia total que hay entre el motociclista y el punto perpendicularmente donde está parado el espectador; la expresión  $x$  representa la distancia parcial que recorre el motociclista; la expresión  $d$  representa la distancia que le hace falta al motociclista para llegar al punto donde está parado el espectador perpendicularmente, estas cantidades desconocidas se caracterizan porque de una u otra manera varían; los 5 *metros* representan la altura del puente; los  $20^\circ$  representan el ángulo que se forma entre la primera línea visual del espectador y el motociclista; los  $40^\circ$  representan el ángulo que se forma entre la segunda línea visual del espectador y el motociclista después de haber recorrido  $x$  distancia, estas tres últimas cantidades son conocidas inicialmente por la tarea propuesta y permanecen fijas.

Este enunciado obedece a las siguientes expresiones algebraicas:

$$1 \quad \tan 40^\circ = \frac{5m}{d} \qquad 2 \quad \tan 20^\circ = \frac{5m}{x+d}$$

Como se mencionó antes, en este ejemplo se observa supuestamente un movimiento, es decir, una variación del ángulo  $\theta$  que va desde  $20^\circ$  hasta  $40^\circ$  cuando el motociclista recorre  $x$  distancia, sin embargo, cuando se resuelve la tarea dicho movimiento se ignora, para reducirse a la presencia de unas cantidades fijas conocidas, que son constantes (e. g.: ángulos de depresión) y otras desconocidas (e. g.: la expresión  $x$  que representa la distancia parcial que recorre el motociclista y la expresión  $d$  que representa la distancia que le hace falta al motociclista para llegar al punto donde está parado el espectador).

De acuerdo con esto, en esta sub-tipología de tareas se reitera una vez más, el hallazgo de un valor numérico en particular -distancia que recorre el motociclista-, a pesar de que en este enunciado se utilizan algunas palabras que dan cuenta de los fenómenos de cambio y variación en una situación.

### **Tareas de carácter funcional – geométrico**

En esta sub-tipología se agrupan aquellas tareas que obedecen a “**contextos**” en los cuales la noción de variación y de variable están dentro de las cantidades que aparecen representadas mediante una expresión algebraica, que se caracteriza por estar asociada a una constante o a una variable (y no solo incógnitas), de este modo, una expresión de la forma  $raz(\alpha) = \frac{a}{b}$ , con  $a$  constante y el ángulo  $\alpha$  (alpha) y  $b$  variables, implica ver una función  $b = f(\alpha)$  y/o  $\alpha = g(b)$  según sea el interés. En el caso en que las cantidades  $a$  y  $b$  sean variables, se tendría una función lineal cuya proporcionalidad está dada por la expresión ***raz*** ( $\alpha$ ).



En este sentido, es importante resaltar que por medio del estudio de estas tareas, el estudiante se ve implicado en el reconocimiento de estructuras invariantes, que conllevan a la identificación de las relaciones trigonométricas entre las cantidades. Por otra parte, en los libros de texto analizados no se encontraron tareas que permitieran ser abordadas desde una perspectiva variacional, sin embargo, fue posible establecer unas sub-tipologías de acuerdo a la forma como estas se resuelven, ellas son:

*Directa.*

Para abordar esta sub-tipología de tareas en el estudio de las relaciones trigonométricas es necesario que los estudiantes identifiquen en el enunciado propuesto que cantidades son variables y cual es constante, porque la intervención de estas cantidades -llamasen altura, distancia o ángulo- posibilitan explorar y reflexionar sobre los fenómenos de cambio y variación expuestos en este tipo de tareas, debido a que están determinados por una única línea visual.

Es de aclarar, que esta sub-tipología de tareas pertenece a la expresión algebraica denotada unos párrafos atrás, porque son de la forma  $\text{raz}(\alpha) = \frac{a}{b}$ , donde el ángulo  $\alpha$  (alpha) y  $b$  son variables y  $a$  constante. Como se expreso anteriormente, en los libros de textos analizados no se pudo encontrar ejercicios o problemas que hagan referencia a este tipo de tareas.

A continuación se ejemplifica un enunciado que hace alusión a esta sub-tipología, para ello, modificamos la redacción del problema original, estableciendo ciertas condiciones para que se observara los fenómenos de cambio y variación, en la tarea propuesta.

*Rosa María quiere visitar a su abuela que vive en una torre ubicada en el bosque, la cual tiene una altura de 120 metros; para ello comienza a caminar en línea recta y en determinados momentos se detiene y observa la cúspide la torre, midiendo el ángulo de elevación que allí se forma con un goniómetro. Explorar como varia el ángulo de elevación y la distancia que le hace falta para llegar a la torre.*

La representación gráfica de esta tarea es:

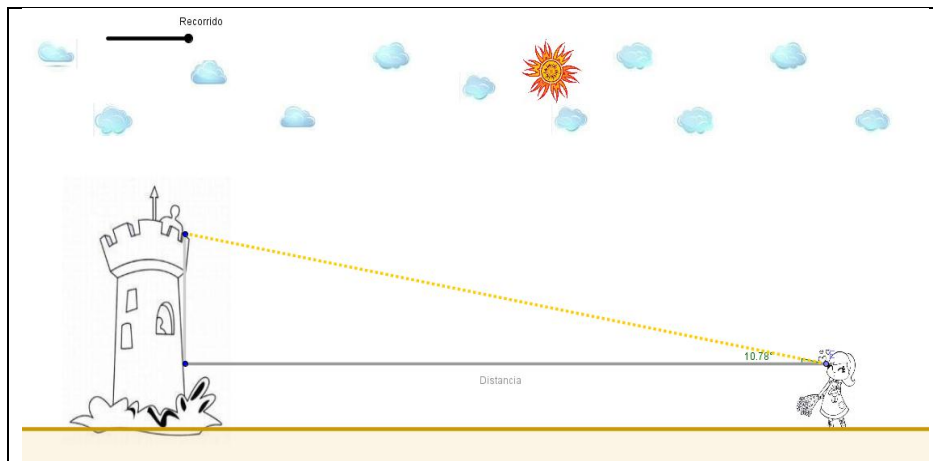


Ilustración 7. Elaboración propia del autor, utilizando el software Geogebra.

Esta nueva condición implicaría la búsqueda de nuevas cantidades que estarían variando, entre ellas se tienen: el ángulo de elevación y la distancia que hay entre el edificio y el observador. De esta manera, conjeturamos que la razón trigonométrica  $\tan \alpha$  se convierte en la herramienta para describir la relación funcional (variación) que existe entre dichas variables, y en consecuencia se deduce que con este tipo de tareas es posible pensar que todas las razones trigonométricas se convierten en una manera de describir los comportamientos “funcionales” entre cantidades.

*Compuesta.*

Para afrontar esta sub-tipología de tareas es necesario tener presente que su aplicación requiere de dos o más razones trigonométricas, donde se evidencie a través de un enunciado la noción de variable, de tal manera, que permita experimentar y analizar simultáneamente la variación de algunos de sus elementos, mientras otros se mantienen constantes. De acuerdo con esta indicación, estas sub-tipología de tareas pertenecen a la siguiente estructura:

$$raz_1(\alpha_1) = \frac{a_1}{b_1}, \quad raz_2(\alpha_2) = \frac{a_2}{b_2} \quad \dots \quad raz_n(\alpha_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

Donde  $raz_1, raz_2, \dots, raz_n$  representa a cualquiera de las seis razones trigonométricas, los símbolos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n$  representan cantidades variables o en algunos casos una de ellas es constante. La expresión  $raz_n$  también puede referirse a la necesidad de utilizar la denominadas “ley del seno” o “del coseno” y así poder resolver satisfactoriamente la tarea propuesta. Como se manifestó anteriormente, en los libros de textos analizados no se pudo encontrar ejercicios o problemas que hagan referencia a este tipo de tareas.

A continuación se ejemplifica un enunciado que hace referencia a esta sub-tipología, para ello, se reforman partes de la redacción original de un problema extraído de uno de los libros de texto analizados, estableciendo nuevas condiciones para que se observe los fenómenos de cambio y variación, en la tarea propuesta.

*Un avión es visto por dos observadores que están separados entre si a una distancia de 1000 pies. Cuando el avión pasa por la línea horizontal que une a estos dos observadores, cada uno de ellos decide simultáneamente hacer lectura del ángulos de elevación del avión con un goniómetro y registrarla en su cuaderno de apuntes cada 30 segundos, mientras el avión pasaba por este lugar. Posteriormente estos dos observadores se reúnen y tratan de calcular a que altura se encontraba el avión en estos momentos.*

La representación gráfica de esta tarea es:

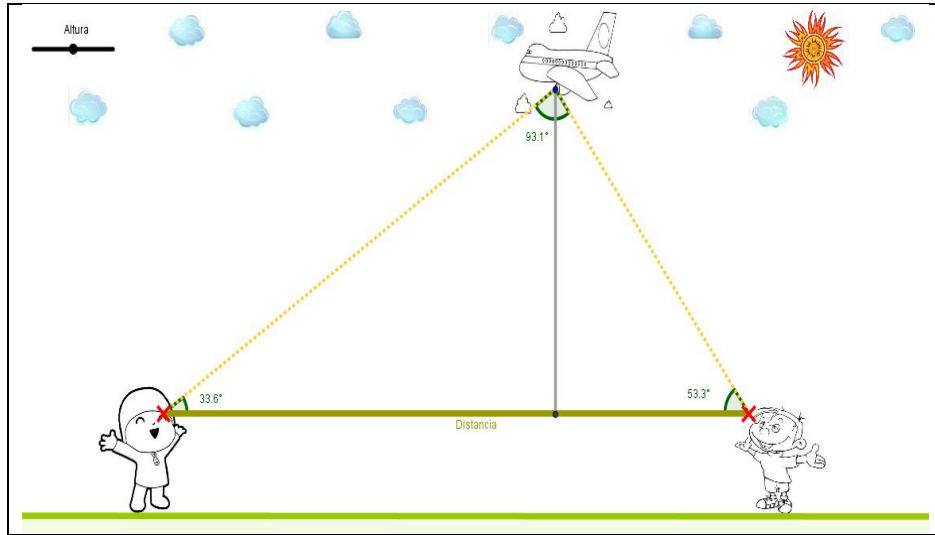


Ilustración 8. Elaboración propia del autor, utilizando el software Geogebra.

Es de anotar, que las nuevas condiciones de la tarea propuesta necesariamente conlleva a la búsqueda de nuevas cantidades que estarían variando, entre ellas se tienen: los ángulos de elevación de los dos observadores, la altura del avión y la distancia de la línea visual que permite el alejamiento o acercamiento del avión a uno de los dos observadores. De esta manera, se conjetura que la “ley del seno” mediante la expresión  $raz_n$  se convierte en una herramienta para describir las relaciones funcionales entre dichas variables, y en consecuencia se deduce que con este tipo de tareas es posible pensar que tanto la “ley del seno” como la “ley del coseno” se convierten en una forma de describir los comportamientos “funcionales” entre cantidades.

Teniendo en cuenta los dos últimos ejemplos, se considera que el “contexto evocado” permite expresar tareas que pongan de relieve las relaciones “dinámicas” entre cantidades (e.g.: ángulos y lados de un triángulo), y por lo tanto, diferentes aspectos asociados al pensamiento variacional, entre ellos: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia,

surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, refutación o demostración formal de las conjeturas (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010). Sin embargo, esto no implica que se puedan sugerir actividades en otros contextos, por ejemplo en el “contexto simulado” los estudiantes pueden “experimentar” y “re-construir” una situación en el aula de clase a través de proyectos.

### **Tareas a manera de propuesta, donde se visualiza el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas**

El uso de Software de Geometría Dinámica (e.g.: Geogebra) permite estudiar algunas temáticas de la trigonometría plana desde el punto de vista variacional, porque incorpora el movimiento en forma de variable para que el estudiante identifique los fenómenos de cambio y variación allí expuestos, de tal manera que analice e interprete las relaciones producidas por éstas en una situación determinada. En este sentido, la visualización juega un papel interesante, porque incide en la generalización y en la abstracción de patrones y regularidades, que son demostrados en la detección de estructuras invariantes, posibilitando así el hecho de establecer conjeturas y experimentar el cumplimiento de algunas propiedades geométricas que no estaban previamente establecidas.

Esta primera tarea se denominada “*Las Sombras del Árbol*”<sup>5</sup> (Ilustración 9), donde actúa como escenario para observar algunas relaciones funcionales o dinámicas entre cantidades, en un problema de trigonometría. La tarea se empieza a desarrollar cuando dos personas discuten sobre

---

<sup>5</sup> Esta tipología de tarea es producto de las reflexiones de esta investigación, fue publicada en el texto: *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra* y presentada por Tavera y Villa-Ochoa; (2012, pp. 290 - 292).

la medida de la sombra de un árbol; para ello, es necesario simular los rayos solares, para poder visualizar con claridad como cambia dicha sombra. Para realizar esto, los estudiantes han de fijar un triángulo, que puede ser rectángulo u obtusángulo dependiendo de la inclinación del terreno, la cual es proporcionada por el deslizador  $\alpha$  (alpha) en la figura. De manera particular, los elementos que varían en la situación son:

- *El ángulo de elevación del terreno.* Proporcionado por el deslizador  $\alpha$  (alpha) que se encuentra en la parte superior izquierda de la ventana. Este deslizador puede funcionar como un parámetro, el cual se “fija” para poder determinar el tipo de triángulo y la variación entre los lados y los ángulos del triángulo (Ilustración 9).
- *El ángulo de inclinación del árbol.* Este ángulo está determinado por la superficie (piso) y el árbol; dicho ángulo siempre estará en función del ángulo  $\alpha$  (alpha) y, por tanto, también puede funcionar como un parámetro.
- *La posición de sol.* La situación incorpora el movimiento del sol, el cual se desplaza por una línea horizontal generando, a su vez, una variación del *ángulo formado por la superficie (piso) y los rayos solares* y, de la misma manera, la variación de la *sombra proyectada por el árbol sobre la superficie*.
- *Longitud del árbol.* En esta situación la longitud del árbol puede cambiar de acuerdo al deslizador “longitud”, que se muestra en la parte superior izquierda de la ilustración 9.

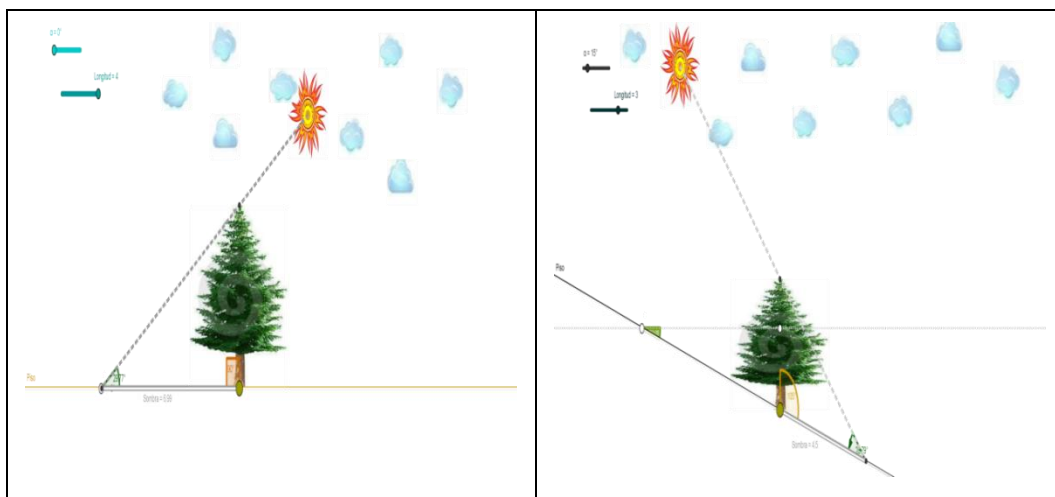


Ilustración 9. Construcción propia de la variación en un problema de trigonometría.

La situación está diseñada para abordarse en varios momentos, en un primer momento el ángulo  $\alpha$  (alpha) se fija en  $0^\circ$  (cero grados) generando una relación de covariación entre *la sombra del árbol* y *el ángulo de elevación formado por los rayos de sol y la superficie*. En este primer momento el estudio se reduce a establecer dicha covariación que se describe mediante la relación trigonométrica tangente.

En un segundo momento, el ángulo  $\alpha$  (alpha) puede variar y, en estos casos, la covariación entre la sombra y el ángulo formado por los rayos del sol y la superficie origina un triángulo no rectángulo lo que conduce al estudio de otras propiedades de la trigonometría plana, a saber, las leyes del seno y del coseno.

En cada momento de la situación están presente preguntas como: ¿Qué cantidades varían?, ¿Cómo varían? ¿En cuánto varían? Y con la ayuda de las tablas y los gráficos proporcionados por el software Geogebra se construye una visión más amplia sobre la situación de variación.

Por otra parte, en los estudios de Font y Godino (2006) se pone de manifiesto que el conocimiento matemático se construye usándolo en “*contextos reales*” o al menos en “*contextos simulados*”, porque “*en la vida cotidiana los problemas son concretos y sólo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas a resolver*” (p. 91); a causa de ello, se vio en la necesidad de construir un prototipo de tarea donde se evidencie el “*contexto simulado*” desde una perspectiva variacional, teniendo presente lo expuesto por Font (2007) en el apartado 2.1.2.

*El profesor de matemáticas aprovechando algunos vientos decide llevar al aula de clase una cometa y le aclara a sus estudiantes que esta tiene una pita que mide 60 m, la cual será elevada por Santiago en la cancha de fútbol del colegio. Pasados diez minutos de Santiago haber iniciado esta acción, el profesor se da cuenta que el cordel de la cometa ya se encuentra tenso, entonces le dice a sus estudiantes que cada vez que Santiago avance o retroceda secuencialmente 5 pasos, ellos con el goniómetro medirán el ángulo que allí se forma y con la cinta métrica determinaran a cuantos metros se sostiene el extremo de la pita con el suelo y que traten de calcular la altura aproximada de la cometa.*

Es de anotar, que las tareas que propician los libros de texto pueden ser abordadas a partir de un “contexto simulado”, donde se redacte una situación que permita el uso adecuado de la tecnología, para que el estudiante experimente, reflexione, conjeture y deduzca algún tipo de conocimiento, en este caso, aquellos que están relacionados con el estudio de las relaciones trigonométricas.

En este sentido, es importante resaltar que las tareas que hacen referencia a “contextos reales” no siempre constituyen objeto de estudio de fácil aprehensión por parte del estudiante, porque depende, en gran medida, de la situación o condición que se establezca para ser abordada, así como el nivel social o estilo de vida del participante; quizás sea esta la razón por la cual, los libros de texto analizados no incluyan en sus temáticas tareas de hagan alusión a este contexto.



A continuación se presenta una situación que ejemplifica una tarea que hace referencia a un problema que pertenece a un “contexto real” y a su vez, al estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, con el software Geogebra, pues esta tarea se denomina, “La Escalera de los Bomberos”<sup>6</sup>

*Cuando los bomberos acuden a un edificio es muy habitual que utilicen sus escaleras desplegadas para ascender, desde el exterior, a las diferentes partes del edificio. Para ello han de fijar un determinado ángulo de elevación y, a continuación, extender la escalera hasta conseguir alcanzar el punto deseado.*

*En esta aplicación vamos a manejar uno de estos vehículos. Mediante el deslizador horizontal que se encuentra en la parte superior izquierda de la ventana puedes fijar el ángulo de inclinación de la escalera. Para extender y replegar la escalera es necesario mover el punto amarillo situado en su extremo. A su vez, puedes cambiar la posición del vehículo moviendo el punto situado en su parte inferior.*

*Una vez fijado un ángulo de inclinación, cuanto más extendamos la escalera mayor será la altura que alcanzamos. Pero, ¿qué relación hay entre la longitud de la escalera y la altura que ganamos? ¿se mantiene constante esa relación para un determinado ángulo de inclinación? Vamos a tratar de investigarlo.*

Para realizar este tipo de tareas se requiere el uso de la tecnología a través del Software Geogebra, teniendo en cuenta la siguiente construcción geométrica:

---

<sup>6</sup> Este tipo de tareas fue extraído de la página web:  
[http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/escale\\_ra\\_bomberos/actividad.html](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/escale_ra_bomberos/actividad.html) Consultada el 13 de Mayo del 2012.

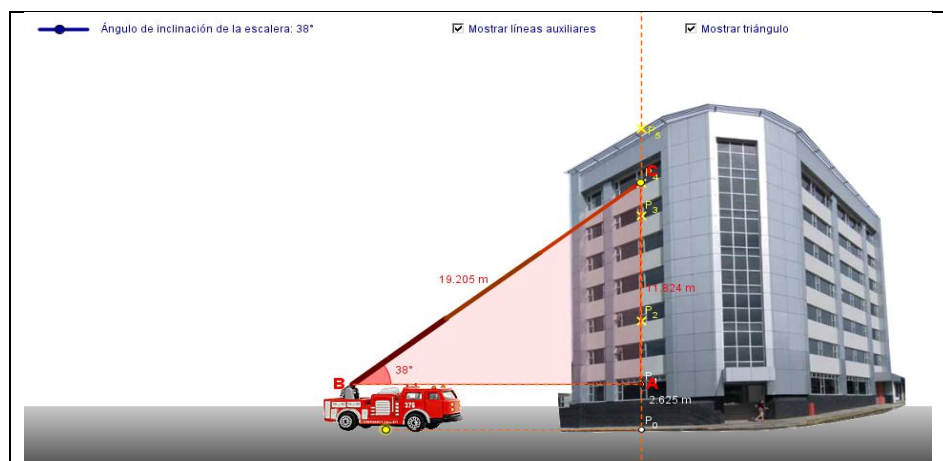


Ilustración 10. Imagen tomada de página web:

[http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/escalera\\_bomberos/actividad.html](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/escalera_bomberos/actividad.html)

Tareas que pueden ser abordadas desde una perspectiva variacional:

1 Inclina la escalera hasta formar un ángulo de  $40^\circ$  y activa la casilla mostrar líneas auxiliares. Una vez girada la escalera, ¿qué altura alcanza su extremo con respecto a la base de la misma? Extiende ahora la escalera y anota, en varias posiciones más, la longitud de la escalera y la altura que alcanza el extremo con respecto a la base. Registra en la siguiente tabla los valores que vas obteniendo:

Ángulo de inclinación: $40^\circ$			
Posición	Altura del extremo de la escalera con respecto a la base (m)	Longitud de la escalera (m)	Razón entre la altura alcanzada y la longitud de la escalera
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			


2. Completa ahora la tabla anterior calculando en cada caso la razón entre la altura del extremo de la escalera con respecto a su base y la longitud de la escalera (cuarta columna). ¿Qué observas?

3. Repliega ahora la escalera y fija el ángulo de inclinación en  $20^\circ$ . Repite el proceso que has seguido en los dos primeros ejercicios con este nuevo ángulo y completa la siguiente tabla:

Ángulo de inclinación: $20^\circ$			
Posición	Altura del extremo de la escalera con respecto a la base (m)	Longitud de la escalera (m)	Razón entre la altura alcanzada y la longitud de la escalera
1			
2			
3			
4			
5			
6			


- ¿Qué observas al calcular la razón entre la altura alcanzada y la longitud de la escalera?

4. ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier ángulo de inclinación que fijemos? Es decir, fijado un ángulo, ¿se mantendrá la razón entre la altura alcanzada y la longitud de la escalera? En caso afirmativo, ¿cuánto vale dicha razón si el ángulo es de  $30^\circ$ ? ¿Y si el ángulo es de  $45^\circ$ ?

5. Haz clic en el botón  Reinicia. Activa la casilla “Mostrar triángulo”. Observa el triángulo rectángulo ABC. Con respecto al ángulo B, en los ejercicios anteriores has calculado la razón entre su cateto opuesto AC y la hipotenusa BC. Dicha razón se llama SENO del ángulo B

y, como has podido comprobar en los ejercicios anteriores, el valor no depende de la longitud de los lados del triángulo, sino solamente de la amplitud del ángulo B. Utiliza la aplicación para calcular el seno de los siguientes ángulos:

Angulo (°)	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Seno						

6 Haz clic en el botón  Reinicia. Activa la casilla Mostrar líneas auxiliares. Calcula la altura a la que se encuentra el punto P<sub>2</sub> de la fachada con respecto al nivel de la calle (punto P<sub>0</sub>).

7 Con un ángulo de inclinación de 40° y una longitud de escalera de 15 metros puedes alcanzar un punto de la fachada. ¿De qué punto se trata? ¿A qué altura está ese punto con respecto a la base de la escalera? ¿Y con respecto al nivel de la calle?

8 ¿Podríamos calcular la altura de este punto conocida la longitud de la escalera (15 m) y el valor del seno de 40°, que ya has calculado en el ejercicio 5? En caso afirmativo haz los cálculos oportunos y comprueba tus resultados con los que has obtenido en el ejercicio anterior.

9 Sabiendo que  $\text{sen } 60^\circ = 0.866$  y que la altura del punto P<sub>4</sub> con respecto a la base de la escalera es de 11.77 m, ¿qué longitud debe tener la escalera para alcanzar dicho punto? Haz los cálculos necesarios y comprueba tus resultados con la aplicación, moviendo para ello el camión hasta el punto adecuado.

10 Calcula la altura del edificio (punto P<sub>5</sub>) con respecto al nivel de la calle.

11 ¿Podríamos alcanzar el techo del edificio con un ángulo de inclinación de la escalera de  $30^\circ$ ? En caso negativo, ¿qué longitud debería tener la escalera, como mínimo, para lograrlo?

12 ¿Cuál es el mínimo ángulo de inclinación de la escalera con el que podemos alcanzar la altura del edificio?

De acuerdo con la experiencia vivida por el investigador, se considera que el uso de la tecnología en los libros de texto para el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, se pueden direccionar a partir de una interpretación geométrica, lo que implica una *reorganización* de los formatos establecidos para la publicación de estos textos escolares; esta situación puede producir ciertos cuestionamientos a las empresas dedicadas a la producción y comercialización de estos escritos, porque el papel impreso presenta de forma estática los fenómenos de cambio y variación, trayendo como consecuencia que haya discordancia frente a lo que se propone, desde la literatura y complementada por el MEN, sobre el desarrollo del pensamiento variacional.

De otro modo, la integración de tecnologías digitales en el aula de clase pone de relieve el estudio variacional de los conceptos matemáticos (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010) y en coherencia con ello, los libros de texto deben apuntar a buscar otros formatos de interacción online, de tal manera, que se posibiliten un mayor “dinamismo” entre los estudiantes y las matemáticas.

# CAPÍTULO V

---

## CONCLUSIONES

Al realizar el estudio de la presentación de las tareas propuestas sobre las relaciones trigonométricas, en algunos libros de texto del grado décimo, desde una perspectiva variacional se puede concluir que:

Los libros de texto analizados, privilegian un contexto matemático seguido de un contexto evocado, lo cual permite inferir que en estos textos descuidan algunos elementos que propician el desarrollo del pensamiento variacional, dado que las tareas allí propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas se resuelven mediante el uso de expresiones algebraicas, para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo, trayendo como consecuencia que esta temática sea asumida como un proceso memorístico, rutinario y mecánico (Fiallo, 2010). Esta situación se puede deducir, porque los libros de texto seleccionados dejan relegado dicho pensamiento a otras temáticas trabajadas en la trigonometría de la circunferencia o en la trigonometría analítica, lo cual se convierte en evidencia de la brecha existente entre el estudio geométrico y analítico de la trigonometría según lo ha mencionado Montiel (2005).

Los resultados encontrados de este estudio también permiten observar que los contextos simulados y reales como los descritos por Font (2007) aparecen invisibles en el estudio de las relaciones trigonométricas, según las actividades, ejercicios y problemas propuesto en los libros

de texto seleccionados; y esto es coherente con la complejidad que implica este tipo de contextos que exigen de cierto dinamismo, no solo a nivel de los conceptos matemáticos, sino de las relaciones entre las matemáticas y las situaciones extraescolares; sin embargo, se considera una vez más que con la integración de las tecnologías pueden aparecer nuevas sugerencias para el desarrollo de tareas en estos contextos que impliquen el estudio variacional de las relaciones trigonométricas.

Los libros de texto son asumidos como el principal recurso que el docente emplea para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, en este estudio se evidenció que existe cierto distanciamiento entre lo propuesto por el MEN, asociado a los resultados obtenidos en las indagaciones realizadas sobre la variación y lo que usualmente presentan los libros de texto del grado décimo; dado que las editoriales para publicar sus textos, no siempre acogen las recomendaciones planteadas en los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencia (2006) y lo propuesto por algunas investigaciones, sobre algunos elementos que intervienen favorablemente en el desarrollo del pensamiento variacional. Esto se puede inferir, porque las tareas planteadas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas omiten de cierta manera centran la atención en el reconocimiento y la matematización de la variación.

En los libros de texto seleccionados, las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas permiten la utilización de un *“lenguaje natural,”* porque aquí el estudiante debe analizar e interpretar el problema que se plantea; a través del uso de una *“representación geométrica”* se puede explorar y potencializar la visualización de los conceptos tratados en esta

temática y poderlos relacionar con la geometría; desde una “*representación numérica*” el aprendiz pone de manifiesto la necesidad de tabular los datos encontrados en una situación determinada; y con la práctica de una “*representación algebraica*” se puede proporcionar la identificación y abstracción de los elementos invariable en un problema planteado.

De acuerdo con el análisis hecho a algunos libros de texto del grado décimo, se observa que el “contexto matemático” ocupa la mayor parte de las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas, sin embargo, al no haber ejercicios y problemas donde se registre el uso de contextos simulados o reales, el “contexto evocado” es el que más se ajusta a situaciones donde se puedan evidenciar eventos dinámicos, dado que no se encontró tareas que ofrezcan una descripción de la relación funcional entre los lados y los ángulos de un triángulo. Estos hallazgos ponen de relieve la necesidad de establecer nuevas relaciones, en las cuales los conceptos matemáticos (en este caso, aquellos que permiten el estudio de las relaciones trigonométricas) se perciban de una manera dinámica, para que los estudiantes puedan describir, interpretar, predecir, cuantificar y modelar.

Por otra parte, al identificar el reconocimiento de las ventajas y limitaciones que los libros de texto tienen frente al estudio de las relaciones trigonométricas, desde el punto vista variacional se puede concluir que:

Para que los libros de texto de matemáticas propongan tareas que hagan referencia a contextos en los cuales la variación este presente, es pertinente que estos mediadores curriculares planteen situaciones que puedan ser abordadas a partir del uso de Software de Geometría



Dinámica (e.g.: Geogebra), porque estos medios tecnológicos brindan la posibilidad de incorporar el movimiento en forma de variable para que los estudiante exploren, reflexionen, establezcan conjeturas y deduzcan los conceptos y las estructuras invariantes que no estaban previamente establecidas en el estudio de las relaciones trigonométricas.

Bajo la anterior idea, el trabajo de Embong, Noor, Hashim, Ali, y Shaari (2012) señala que a través de la integración de la tecnología en el aula de clase, tanto maestros como diseñadores del currículo pueden mejorar los métodos de enseñanza y así fortalecer el proceso de aprendizaje de sus estudiantes. Además estos autores, generan el paso transitivo de los libros de texto a los textos electrónicos, porque estos últimos son utilizados como recurso adicional para fomentar la creatividad y la autonomía de los estudiantes, debido a que presentan gráficas atractivas, permiten el diálogo constante con otros medios como el internet, la oralidad (en ambiente virtual) y el maestro debe acompañar constantemente las actividades realizadas por los estudiantes.

En los libros de texto analizados, “*las epistemes estudiantiles de tiempo*” aparecen explícita e implícitamente en el marco de las representaciones cotidianas de la variación, donde se visualiza una naturaleza *estática y discreta*, pero no *dinámica y continua*. Es ahí, donde el Software de Geometría Dinámica (e.g.: Geogebra), muestra la importancia que tienen estas dos últimas naturalezas en el estableciendo del sentido de los elementos que entran en juego sobre la idea de variación.

Las orientaciones propuestas por el MEN (Colombia, 1998; 2006) sugieren introducir el pensamiento variacional, de manera general, en el aula de clase para ahondar en el aprendizaje de patrones y regularidades y en el análisis de funciones, debido a que estas temáticas pueden ser asumidas desde escenarios referidos a situaciones de cambio y variación, puesto que están presentes en algunas disciplinas y en contextos de la vida cotidiana, razón que deben aprovechar los libros de texto del grado décimo para enriquecer el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, dado que las tareas allí propuestas permiten ciertos acoplamientos a contextos en los cuales la simulación este presente a través de la utilización de Software de Geometría Dinámica (e.g.: Geogebra), pues éste permite visualizar con detenimiento las estructuras invariantes que antes solo se manejan en abstracto.

## BIBLIOGRAFÍA

Alfonso Orozco, L. S., Salgado Ramírez, D., Romero Rua, J., & Torres Sánchez, W. E. (2004). *Trigonometría y geometría analítica*. Bogotá: Santillana.

Álvarez Jiménez, R., Fernández Castaño, H., & Rúa Vásquez, J. A. (2009). *Matemáticas básicas con aplicaciones a las ciencias económicas y afines*. Medellín: Ecoe Ediciones Ltda.

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(1), 25 - 45.

Bautista Ballén, M., Chamorro Muñoz, J. A., Romero Rua, J., Torres Sánchez, W. E., & Ramírez Méndez, C. O. (2007). *Trigonometría, geometría analítica y estadística*. Bogotá: Santillana.

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 367 - 390.

Blackett, N., & Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. *The Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XV*, 1, 144 - 151.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. New Your: Springer.

Borba, M., & Godoy Penteado, M. (2010). *Informática e Educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M., & Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer.

Brown, S. A. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, pág. 228. Prague: PME.

Cantoral Uriza, R., & Farfán Márquez, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon*, 14(3), 353 - 369.

Choppin, A. (1980). L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche française. *Histoire de l'éducation*, 58, 165 - 185.

Colombia. MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Colombia. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Bogotá: Magisterio.

Colombia. SEDUCA. (2000). *Pruebas SABER en Antioquia*. Medellín.

Colombia. SEDUCA. (2005). *Interpretación e implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas*. Medellín: Digital Express Ltda.

Colombia. SEDUCA. (2006). *Modulo 2 "Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico"*. Medellín: Artes y Letras Ltda.

Daniel, D. B., & Douglas Woody, W. (2013). E-textbooks at what cost? Performance and use of electronic v. print texts. *Computers & Education* , 62, 18 - 23.

Díaz Moreno, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 145 - 168.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen, *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching* (Vol. 10, págs. 63 - 85). Netherlands: Springer.

Embong, A. M., Noor, A. M., Hashim, H. M., Ali, R. M., & Shaari, Z. H. (2012). E-Books as textbooks in the classroom. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* , 47, 1802 - 1809.

Fiallo Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Valencia - España: Tesis doctoral de la Universidad de Valencia.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 427 - 442.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educ. Mat. Pesqui. São Paulo*, 8(1), 67 - 98.

Galindo Vega, E., & Cely Ruiz, J. A. (2009). *Fórmula 10*. Bogotá: Voluntad.

Kendal, M., & Kaye, S. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum*, 34(1), 4 - 8.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Ediciones Paidós.

León Rivera, M. L., Carpio García, Z. S., Cuadros Morales, I., & Romero Carvajal, G. (2011). Importancia de los enfoques cuantitativos y cualitativos de Investigación en Ciencias Sociales. *La Universidad del Valle de México*, 1 - 11.

Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 135 - 157.

Londoño, N., & Bedoya, H. (1988). *Matemática progresiva "Geometría analítica y Trigonometría"*. Santa fe de Bogotá: Norma.

Manson, J., Graham, A., Pimm, D., & Gower, N. (1999). *Rutas hacia el álgebra. Raíces del álgebra*. (C. Agudelo - Valderrama, Trad.) Tunja - Boyacá: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Markel, W. D. (1982). Trigonometry - ¿Forgotten and Abused? *School Science and Mathematics*, 82(7), 548 - 551.

Mejía Duque, F., Álvarez Jiménez, R., & Fernández Castaño, H. (2005). *Matemáticas previas al cálculo*. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Montiel Espinosa, G. (2005). *Estudio socio - epistemológico de la función trigonométrica*. México: Tesis doctoral del Instituto Politécnico Nacional: Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada.

Moore, K. C. (2010). Trigonometry, Technology and Didactic Objects. En S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Ed.), *Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 5, págs. 1480 - 1488. Atlanta, Georgia, USA: PME.

Moreno Gutiérrez, V. (2006). *Conexiones Matemáticas 10*. Bogotá: Norma.

Orhun, N. (2001). Student's Mistakes and Misconceptions on Teaching of Trigonometry. *The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference New Ideas in Mathematics Education*, 208 - 211.

Pino Ceballos, J., & Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63 - 88.

Posada Balvín, F. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2006 a). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En Colombia, SEDUCA, *Modulo 2 "Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico"* (págs. 127 - 163). Medellín: Artes y Letras Ltda.

Posada Balvín, F. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2006 b). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Tesis de Maestría no publicada*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Randahl, M. (2012). Approach to mathematics in textbooks at tertiary level: Exploring authors' views about their texts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(7), 881 - 896.

Reséndiz Balderas, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa*, 9(003), 435 - 458.

Santos Trigo, L. (2001 a). El uso de software dinámico en el desarrollo de significados y conexiones en el aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia Internacional sobre el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas* (págs. 59 - 69). Morelia - México: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Santos Trigo, L. (2001 b). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Avance y Perspectiva*, 1(20), 247 - 258.

Selva, A., & Borba, M. (2013). *Uso de la Calculadora en los primeros grados de escolaridad*. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Solís Valdespino, B. E. (2008). La técnica del análisis de contenido y su aplicación en los planes de estudio de bibliotecología en México, para determinar la presencia de la formación de usuarios. En P. Hernández Salazar, *Métodos cualitativos para estudiar a los usuarios de la información* (págs. 167 - 212). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Sotero Calvo, F. A., Donaire, J. J., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., & Vizmanos, J. R. (2009). *Código Matemáticas 10*. Bogotá: Grupo SM.



Stone, R. W., & Baker-Eveleth, L. (2013). Students' expectation, confirmation, and continuance intention to use electronic textbooks. *Journal Computers in Human Behavior*, 29(3), 984 - 990.

Swokowski, E., & Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Thomson Learning.

Tavera Acevedo, F. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2012). Pensamiento Variacional: El estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos. En F. J. Córdoba Gómez, & J. Cardeño Espinosa, *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (págs. 282 - 294). Medellín: Instituto Tecnológico Metropolitano.

Uribe Calad, J. (1998). *Matemáticas experimental 10*. Santa fe de Bogotá: Uros Editores.

Van Steenbrugge, H., Valcke, M., & Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flanders: Does it (not) matter which mathematics textbook series shoools choose? *Journal of Curriculum Studies*, 45(3), 322 - 353.

Vasco Uribe, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Vergara, G., Rojas, C. R., & García, O. E. (2009). *Misión Matemática 10*. Bogotá. D. C: Grupo Editorial Educar.

Villa-Ochoa, J. A. (2009). *Presente y futuro de la investigación en modelación en Educación Matemática en Colombia*. Pasto: Memoria 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J. A. (2010). *La modelación matemática en el currículo. Elementos para la discusión*. Bogotá D. C: Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 9 - 25.

Villa-Ochoa, J. A., & Jaramillo López, C. M. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman, *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, págs. 701 - 711). Netherlands: Springer.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 514 - 528.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares colombianos. *Revista virtual "Universidad Católica del Norte"*, 27, 1 - 21.

Weber, K. (2005). Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91 - 112.

Zill, D., & Dewar, J. (2000). *Álgebra y trigonometría*. Santa fe de Bogotá: McGraw - Hill.

## **ANEXO N° 1**

Artículo que será presentado y publicado en el evento académico:

I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe

Tavera y Villa-Ochoa (2013 a)



## **El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: El caso de las relaciones trigonométricas**

Ferney Tavera Acevedo

Universidad de Medellín (Estudiante Maestría en Educación Matemática)

Colombia

[ftavera827@yahoo.es](mailto:ftavera827@yahoo.es)

Jhony Alexander Villa-Ochoa

Universidad de Antioquia (Docente de la facultad de Educación)

Colombia

[javo@une.net.co](mailto:javo@une.net.co)

### **Resumen**

En el presente documento reportamos parte de los resultados obtenidos de una investigación que centró su atención en el estudio de algunos tópicos de la trigonometría plana presente en los libros de texto de matemáticas de la Educación Media (15 - 18 años). En particular, nos propusimos interpretar la manera en que los libros de texto de matemáticas ponen de relieve los aspectos variacionales en estos tópicos. A través de la técnica del análisis de contenido pudimos observar que generalmente esta temática se desarrolla a través de expresiones algebraicas para calcular “datos fijos y desconocidos” de un triángulo; los resultados del estudio muestran que la necesidad de diseñar propuestas alternativas, en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones “dinámicas” y funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo.

*Palabras clave:* pensamiento variacional, libros de texto, relaciones trigonométricas, uso de la tecnología.

## Introducción

Esta investigación se desarrolló en el marco de la Maestría en Educación Matemática en la Universidad de Medellín-Colombia y tuvo su génesis en una revisión de la literatura a la luz del pensamiento variacional asociado al estudio de algunos tópicos de la trigonometría plana. Desde dicha revisión encontramos que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia ha señalado que este pensamiento está en relación con *“el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”* (Colombia, 1998, p. 73).

El pensamiento variacional no es un logro que se atiende de manera específica en algún nivel educativo, sino que cada grado de escolaridad debe propender por promover el desarrollo de dicho pensamiento; por esta razón, el MEN recomienda que desde la Educación Básica primaria se debe construir *“distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico”* (Colombia, 2006, p. 66).

De acuerdo con lo establecido por el MEN (Colombia, 2006; 1998) consideramos que el desarrollo del pensamiento variacional conlleva al reconocimiento de fenómenos de cambio y variación, por tal motivo, es necesario propiciar en el aula de clase actividades para que los estudiantes exploren, reflexionen, deduzcan, conjeturen y planteen nuevas situaciones frente a las relaciones dinámicas que se generan entre los conceptos matemáticos, en este caso, aquellos que se originan con el estudio de las relaciones trigonométricas.

## Algunos antecedentes

Investigadores como Brown (2006) y Fiallo (2010) han señalado que son pocas las indagaciones que existen en relación a la trigonometría escolar; de igual modo, estos autores también revelan la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de algunos tópicos de la trigonometría, en la cual ponen en evidencia una desconexión entre las diferentes formas de abordar el estudio de las razones trigonométricas; puesto que esta temática usualmente se trabaja en el aula de clase como razones entre los lados de un triángulo rectángulo, como coordenadas de un punto sobre el círculo unitario y como funciones (Brown, 2006) de manera independiente, trayendo como consecuencia que los estudiantes adquieran una comprensión incompleta o fragmentada de los conceptos allí tratados (Fiallo, 2010).

Desde esta perspectiva, consideramos que por la falta de una conexión entre las temáticas antes mencionadas, es posible afrontar algunas dificultades y limitaciones en la interpretación variacional del estudio de las relaciones trigonométricas, puesto que, tanto la noción de razón como la de función, tienen en común una “naturaleza variacional”. En este sentido, nos preocupamos por observar la manera en que los libros de texto han integrado o no aspectos variacionales o dinámicos en los desarrollos que presentan de la trigonometría, en particular, en la trigonometría del triángulo.

La idea de centrar la atención en los libros de texto se consolida a través de algunos estudios e investigaciones que resaltan las implicaciones que tiene este tipo de recurso en los ejercicios y problemas que plantea habitualmente el docente en clase de matemáticas. Al respecto Selva y Borba (2013) señalan que en muchos casos el libro de texto se considera como

el principal referente del trabajo propuesto en el salón de clase debido, en buena parte, a la ausencia de otros materiales que orienten a los profesores en relación con lo que debe enseñarse y cómo debe hacerse.

A causa de los diferentes argumentos encontrados en esta revisión inicial de literatura, nos interesamos en valorar algunos libros de texto de matemáticas con la intención de observar e interpretar de qué manera estos libros propician el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas. En la siguiente tabla se muestran los libros de texto que se seleccionaron para realizar un primer análisis sobre la manera como este tipo de recurso sugieren abordar la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones trigonométricas, y de esta forma, consolidar el problema de investigación que queremos tratar en este estudio.

*Tabla 1. Libros de texto seleccionados para realizar un primer análisis sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.*

Autor(es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición	Editorial
Londoño, N; Bedoya H	1988	<i>Serie Matemática Progresiva "Geometría Analítica y Trigonometría"</i>	Tercera	Norma
Uribe, J	1998	<i>Matemática Experimental 10</i>	Primera	Uros Editores
Zill, D; Dewar, J	2000	<i>Álgebra y Trigonometría</i>	Segunda	Mc Graw–Hill
Swokowski. E; Cole, J	2002	<i>Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica</i>	Decima	Thomson Learning
Mejía F; Álvarez R; Fernández, H	2005	<i>Matemáticas previas al cálculo</i>	Primera	Sello Editorial Universidad de Medellín
Grupo Editorial Santillana	2010	<i>Hipertexto, Matemáticas 10</i>	Primera	Santillana

De acuerdo con Tavera y Villa-Ochoa (2012) libros de texto como los presentados en la Tabla 1 parecen desaprovechar los contextos de los ejercicios y problemas allí planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen, puesto que las medidas a encontrar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales se puede establecer ciertas relaciones funcionales. Estos resultados nos motivaron a ampliar la búsqueda en otros libros más actualizados y puestos en el mercado posterior a la publicación de los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006); de esa manera nuestra indagación se centro en la pregunta: *¿Qué aspectos del pensamiento variacional se evidencian a través de los libros de texto del grado décimo, en el estudio de las relaciones trigonométricas?*

### Referente conceptual

Desde finales de la década de los noventa, en el campo de la Educación Matemática se ha observado el interés por analizar e interpretar los trabajos relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional y sus implicaciones didácticas a través del proceso de modelación. Al respecto, investigadores como: Cantoral y Farfán, 1998; Reséndiz, 2006; Vasco, 2006; Villa-

Ochoa y Ruiz, 2010; Villa-Ochoa, 2012; han planteado sus puntos de vista, con la intención de que el concepto de variable sea percibido a través de fenómenos de cambio y variación, pues han ofreciendo algunas reflexiones sobre la necesidad de desarrollar este tipo de pensamiento en el aula de clase.

Una mirada a la variación, variable y demás nociones asociadas al pensamiento variacional, no puede ser ajena a las interpretaciones y significados en los contextos en los cuales están inmersos. De ahí que el pensamiento variacional tenga una estrecha relación con el proceso de modelación matemática; según Dörfler (1991) “*generalizar significa construir variables*” (Traducción propia de Dörfler, p. 84) y esto conlleva necesariamente a formular modelos; al menos por dos razones: la primera porque hace énfasis en determinar la forma como una o varias cantidades de magnitud varían con respecto a otra u otras, y la segunda porque tiene la intención de encontrar la expresión algebraica que permite la variación mediante un modelo funcional.

Otras consideraciones del pensamiento variacional articulado a la modelación matemática pueden encontrarse en Vasco (2006) quien considera que este pensamiento va más allá de las interpretaciones clásicas del álgebra, para tratar de ofrecer una descripción más específica de cómo se debe asumir el pensamiento variacional, este autor propone nuevos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones entre este pensamiento, la modelación y la tecnología; de esa manera, puntualiza que este pensamiento puede describirse

[...] como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

De acuerdo con esta mirada, consideramos que en el desarrollo del pensamiento variacional, además de la modelación, se puede (y debe) integrar las tecnologías digitales, pues estas juegan un papel fundante para *visualizar* el dinamismo que caracteriza a algunos conceptos del análisis matemático (e.g.: el concepto de función, derivadas, integrales, etc.). De acuerdo con Tavera y Villa-Ochoa (2012) y con Villa-Ochoa y Ruiz (2010) a través de software dinámico como el Geogebra se puede producir y reproducir las relaciones variacionales que se pueden reconocer entre algunos objetos matemáticos.

Desde el trabajo de Villa-Ochoa y Ruiz (2010) puede inferirse que el estudio del pensamiento variacional constituye uno de los aspectos de mayor riqueza en el ámbito escolar, porque cotidianamente se establece a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias e incluso mediante las mismas matemáticas. Por tal razón, estos autores consideran que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificables, que son expuestas no sólo a través de procesos algebraicos sino también mediante gráficas y registros numéricos de tabulación.

Como consecuencia de lo anteriormente expresado, consideramos que el uso de la tecnología a través del Software Geogebra se convierte en una herramienta que posibilita el desarrollo del pensamiento variacional, porque hace visualmente explícito el *dinamismo implícito* de los conceptos matemáticos. Según Leung (2008) se entiende por *dinamismo*

*implícito* aquellas actividades o razonamientos matemáticos que se emplean para comprender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de “animación mental”, de tal manera, que se puedan observar los patrones de variación o las propiedades invariantes de los objetos conceptuales que están siendo utilizados en ese momento.

Desde esta perspectiva, se deduce que es posible analizar visualmente la variación de algunos elementos que intervienen en el estudio de las relaciones trigonométricas, mientras otros se mantienen constantes, es por esta razón, que Leung (2008) asume la variación como una *esencia epistémica* de la modalidad de arrastre; su objetivo se ve reflejado en el hecho de *generar estrategias de arrastre para descubrir propiedades invariantes en medio de los diferentes componentes de una configuración, representación o construcción geométrica*.

En este sentido, es importante mencionar que los problemas que habitualmente se plantean en los libros de texto sobre el estudio de las relaciones trigonométricas permiten explorar el potencial de Geogebra, porque este software puede establecer simulaciones vinculadas a situaciones del “mundo real” y, por lo tanto, recrear maneras de producir conocimiento articulado, de alguna manera, a procesos de modelación de situaciones que permitan la identificación de regularidades y razonamientos *dinámicos* (covariacional en términos de Villa-Ochoa, 2012).

## Metodología

La presente indagación está enmarcada en un *enfoque cualitativo de investigación* y el método que utiliza para ello, es el *análisis de contenido*, dado que es una “*técnica que pretende dilucidar la naturaleza del discurso generado en una realidad social, la cual está determinada a través de la producción documental sustentada en los libros de texto*” (Pino y Blanco, 2008, p. 73). Basados en dicha descripción, se deduce que esta técnica intenta generar razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados en cualquier tipo de lenguaje que exprese una comunicación (e. g: verbal, gráfico, simbólico), por tal razón, consideramos que sea posible analizar cómo algunos libros de texto del grado décimo presentan el estudio de las relaciones trigonométricas, desde una perspectiva variacional.

Para alcanzar el objetivo propuesto en esta investigación, adicional al conjunto de textos presentados en la Tabla 1, realizamos otra búsqueda de textos de grado décimo; los libros seleccionados debía atender a los siguientes criterios: (i) que aparezcan en el Portal Colombia Aprende<sup>7</sup>, el cual ha sido diseñado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia para que cualquier agente educativo pueda consultar información sobre las diferentes características que poseen los libros de texto que se comercializan en el país para la Educación Básica y Media, (ii) que se tenga evidencias de uso por parte de profesores que dictan el área de matemáticas en el grado décimo y, finalmente, (iii) que desarrolle, de alguna manera, los tópicos de la trigonometría que incluyan el uso de contextos extra-matemáticos en el estudio de las relaciones trigonométricas.

Con base en estos criterios se seleccionó el siguiente conjunto de textos:

---

<sup>7</sup> El sitio web al cual se puede acceder al catálogo de textos escolares, recomendado por el MEN es: <http://www.colombiaprende.edu.co/html/home/1592/article-99610.html> Última consulta Enero 10 de 2013.



*Tabla 2. .Libros de texto seleccionados para realizar un segundo análisis sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.*

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Editorial
Buitrago, L; Romero, J; Ortiz, L; Gamboa, J; Morales, D; Castaño J.	2013	<i>Los caminos del saber Matemáticas 10</i>	Santillana
Sotero, F; Donaire, J; Hernández, J; Moreno, M; Serrano, E; Vízmanos, J.	2010	<i>Código Matemáticas 10</i>	Ediciones SM
Vergara, G; Rojas, C; García, O.	2009	<i>Misión Matemática 10</i>	Grupo Educar
Galindo, E; Cely, J.	2009	<i>Fórmula 10</i>	Voluntad S.A
Bautista, M; Ramírez, C; Chamorro, A; Romero, J; Torres, W.	2007	<i>Trigonometría, geometría Analítica y estadística</i>	Santillana
Moreno, V.	2006	<i>Conexiones Matemáticas 10</i>	Norma

El análisis al segundo conjunto de libros mostró que los textos escolares seleccionados presentan patrones similares en sus secuencias de actividades, de esa manera, inician con una serie de lecturas para que los estudiantes analicen e interpreten situaciones históricas que dieron origen a la construcción de ese conocimiento, después introducen cada temática con una presentación general de la misma, para luego mostrar las definiciones y propiedades con algunos ejemplos, posteriormente se destina un espacio para resolver ejercicios y problemas de aplicación, y, finalmente, algunos hacen un comentario informativo de cómo utilizar la tecnología para algunos conceptos matemáticos, no necesariamente relacionados con el tema que se está trabajando en esos momentos.

De acuerdo a lo expresado en el apartado anterior, la variación está en relación con los contextos y estos a su vez, se observan reflejados en ejercicios y problemas que generalmente se presentan en los libros de texto. Desde esta perspectiva, se planteó la necesidad de resolver todo el conjunto de ejercicios propuestos sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en cada uno de los libros de texto seleccionados, de tal manera, que permitieran identificar el contexto al cual dicho ejercicio o problema hace referencia, posibilitando así, establecer la frecuencia de las categorías y subcategorías encontradas.

Es de anotar, que los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto analizados hacen un uso recurrente de enunciados verbales que pertenecen a un contexto matemático o a un contexto evocado, en los cuales hay una aplicación (casi) inmediata de los procedimientos y expresiones algebraicas previamente abordadas en el contenido de los capítulos. Esta situación crea la necesidad de proponer otro tipo de actividades y hacer alusión a otros contextos, en los cuales estos sean más “auténticos” y de esta forma, poder abordar la complejidad que implica el estudio de la variación asociada a la temática de las relaciones trigonométricas.

### **Algunos hallazgos**

La investigación se desarrolló dos momentos, a saber: un análisis inicial, que estaba fundamentado en examinar la manera como algunos libros de texto, que son utilizados en el grado décimo y en determinados cursos, los primeros semestres de Universidad, propician el

desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas, dado que estos son asumidos como el principal recurso que el docente emplea para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Randahl, 2012), y un segundo análisis se realizó para observar e interpretar las relaciones existentes entre las orientaciones derivadas desde la literatura, lo emanado por el MEN, desde los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencia (2006), asociadas a un estudio variacional de la trigonometría plana y los desarrollos propuestos en los libros de texto del grado décimo.

Los resultados encontrados en el primer análisis, muestran que los libros de textos seleccionados, proponen pocas actividades, ejercicios y problemas donde se evidencie el desarrollo de un pensamiento variacional; de igual manera, observamos un uso constante de fórmulas, caracterizado por un dominio algebraico y procedimental que hace énfasis en el manejo apropiado de símbolos, operaciones y propiedades y que, en ocasiones, tal situación desatiende el reconocimiento de las nociones variacionales que se presentan en esta temática.

En el análisis del primero conjunto de textos, también observamos que la mayoría de ejercicios y problemas se fundamentaban en rutinas para calcular el valor numérico de una distancia o de un ángulo en un triángulo, en el cual los demás datos están dados; esta situación se presenta porque las medidas a encontrar se muestran como incógnitas, es decir, cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales podemos establecer ciertas relaciones funcionales, además se desaprovechan los contextos de los problemas planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen (Tavera y Villa-Ochoa, 2012).

Los resultados encontrados en análisis del segundo conjunto de textos dan cuenta que los libros seleccionados, generalmente para abordar el estudio de las relaciones trigonométricas privilegian un contexto matemático seguido de un contexto evocado, lo cual permite deducir que estos textos también descuidan algunos elementos del pensamiento variacional, debido a que los ejercicios y “problemas” allí propuestos se solucionan a través de expresiones algebraicas para calcular datos “fijos” y desconocidos de un triángulo. Este análisis también permitió identificar que los libros de texto del grado décimo dejan relegado el uso de variables y funciones al estudio de posteriores temáticas como por ejemplo en la trigonometría de la circunferencia o en la trigonometría analítica. Las dos apreciaciones antes mencionadas, se convierten en una evidencia de la brecha existente entre el estudio geométrico y analítico de la trigonometría según lo ha mencionado Montiel (2005).

En los libros de texto del grado décimo analizados encontramos que la mayoría de ejercicios y problemas propuestos sobre las razones trigonométricas se resuelven empleando la *tangente*, puesto que en ellas se establece una relación directa entre el cateto opuesto, el cateto adyacente y el ángulo de estudio; donde el valor numérico de la primera cantidad actúa por lo general, como incógnita y las otras dos cantidades están determinadas por la tarea planteada.

En este sentido, es importante aclarar que en los libros de texto seleccionados también aparecen algunos ejercicios y problemas que para ser solucionados requieren de la razón trigonométrica *seno*, donde hay que hallar el valor de la hipotenusa, que igualmente se muestra como incógnita, pues la tarea propuesta expone el valor numérico al que equivale el cateto opuesto y el ángulo de estudio; es de anotar, que en ambos casos, las cantidades que allí intervienen son datos fijos y constantes, descuidando el uso de variables, parámetros y funciones.

La solución de ejercicios y problemas propuestos por los libros de texto seleccionados sobre el estudio de las relaciones trigonométricas que hacen alusión a un contexto evocado (Font, 2007), que permite establecer de manera mancomunada la relación que puede existir entre las diferentes formas que se emplean en el aula de clase para representar un concepto matemático (e.g.: verbal, numérica, geométrica, algebraica), dado que los estudiantes deben *entender y comprender el problema que se plantea*, para luego tratar de *graficar lo allí expuesto*, de tal manera que logren visualizar en qué lugar se encuentran los datos proporcionados por dicha tarea y aquel(los) que debe hallar, y, finalmente, determina una *expresión algebraica* que a través del manejo *apropiado de algunas propiedades* le permite calcular el valor numérico que satisface completamente la tarea planteada.

De este análisis surge la necesidad de diseñar propuestas alternativas en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo; de este modo, se espera aportar algunos elementos para superar la idea de que el estudio de las relaciones trigonométricas son “fórmulas” para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo.

En la siguiente tabla presentamos una comparación de los principales hallazgos en los análisis realizados a los dos conjuntos de libros de texto.

*Tabla 3. Principales hallazgos encontrados en los dos conjuntos de libros analizados, antes y después de conocerse.*

Conjunto de los libros de textos analizados	Publicados antes de conocerse los Lineamientos o los Estándares	Publicados después de conocerse los Lineamientos y los Estándares
Estructura y presentación de los contenidos	<p>Los textos, en su mayoría, obedecen a secuencias como:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Enumeración de las temáticas y objetivos que se desean alcanzar en cada unidad.</li> <li>• Lectura de situaciones históricas que permitieron dar origen a los conceptos que se abordan en cada unidad.</li> <li>• Cada concepto matemático es abordado a través de una serie repetitiva de ejemplo, seguido de ejercicios que fortalecen la parte procedimental y memorística del estudiante, para que luego éste los aplique en los problemas propuestos.</li> <li>• Los ejercicios y problemas planteados tienen sus respectivas respuestas.</li> <li>• Se recomienda la utilización de la calculadora científica o la calculadora graficadora.</li> </ul>	<p>Los textos, en su mayoría, obedecen a secuencias como:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lectura y análisis de situaciones históricas dieron origen a los conceptos que se abordan en cada unidad.</li> <li>• La presentación de la temática a trabajar se hace mediante ejemplos ilustrativos, luego se plantean algunos ejercicios y problemas de aplicaciones, para que el estudiante observe de qué forma puede utilizar este concepto en la “vida cotidiana”.</li> <li>• Cada unidad trae en su parte final un resumen de los conceptos abordados; algunos de ellos, plantean simulacros tipo pruebas SABER.</li> <li>• Recomiendan utilizar el computador en el aula de clase, a través de algunos software de geometría dinámica como: Geogebra, Cabri Geometry II, Wx máxima, regla y compas, entre otros.</li> </ul>
Contextos más usados, según lo propuesto por Font (2007)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contexto matemático</li> <li>• Contexto evocado</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contexto matemático</li> <li>• Contexto evocado</li> </ul>
Tipos de tareas presentadas por Tavera y Villa-Ochoa (2012)	Hay un predominio de tareas con una interpretación estática.	Hay un predominio de tareas con una interpretación estática y pseudo-dinámica.

## Conclusiones

Los libros de texto son asumidos como el principal recurso que el docente emplea para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, en este estudio se evidenció que existe cierto distanciamiento entre lo emanado por el MEN, asociado a los resultados obtenidos en las indagaciones realizadas sobre la variación y lo que usualmente presentan los libros de texto del grado décimo; dado que las editoriales para publicar sus textos, no siempre acogen las recomendaciones planteadas en los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencia (2006) y lo propuesto por algunas investigaciones, sobre algunos elementos que intervienen favorablemente en el desarrollo del pensamiento variacional. Esto se puede inferir, porque los ejercicios o problemas propuestos sobre el estudio de las relaciones trigonométricas omiten de cierta manera centran la atención en el reconocimiento y la matematización de la variación.

Los resultados encontrados en el análisis de ambos conjuntos de textos escolares permiten observar que los contextos simulados y reales como los descritos por Font (2007) aparentan estar invisibles en el estudio de las relaciones trigonométricas, según las actividades, ejercicios y problemas propuesto en los libros de texto seleccionados; esto es coherente con la complejidad que implican este tipo de contextos que exigen de cierto dinamismo no solo a nivel de los conceptos matemáticos mismos, sino de las relaciones entre las matemáticas y las situaciones extraescolares; sin embargo, consideramos una vez más que con la integración de las tecnologías pueden aparecer nuevas sugerencias para el desarrollo de tareas en estos contextos que impliquen el estudio variacional de las relaciones trigonométricas.

Los estudios previos consultados en esta investigación reportan que el uso de la geometría dinámica (e.g.: Software Geogebra) permite estudiar algunas temáticas de la trigonometría plana desde el punto de vista variacional, ya que incorpora el movimiento en forma de variable para que el estudiante identifique los fenómenos de cambio y variación allí expuestos, de tal manera que analice e interprete las relaciones producidas por éstas en una situación determinada, sin embargo en ambos conjuntos de textos escolares, se observa cierto descuido sobre el rol de la tecnología y, en algunos casos, su uso está enmarcado en comprobaciones o alivio de cargas operacionales más que promover la comprensión conceptual (Selva y Borba, 2013). En este sentido, este estudio llama la atención de los autores de los libros de texto para que promuevan el uso de herramientas de *visualización* puesto que incide en la generalización y en la abstracción de patrones y regularidades, que son demostrados en la detección de propiedades invariantes, posibilitando así el hecho de establecer conjeturas y experimentar el cumplimiento de algunas propiedades geométricas que no estaban previamente establecidas.

El uso de la tecnología en los libros de texto para el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, se tejen a partir de una interpretación geométrica, lo que implica una *reorganización* de los formatos establecidos para la publicación de estos textos escolares; esta situación puede producir ciertos cuestionamientos a las empresas dedicadas a la producción y comercialización de estos escritos, porque el papel impreso presenta de forma estática los fenómenos de cambio y variación, trayendo como consecuencia que haya discordancia frente a lo que se propone, desde la literatura y complementada por el MEN, sobre el desarrollo del pensamiento variacional.

## Bibliografía

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 367 - 390.

Borba, M., & Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer.

Brown, S. A. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 1, págs. 1 - 228. Prague: PME.

Cantoral Uriza, R., & Farfán Márquez, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon*, 14(3), 353 - 369.

Colombia. MEN. (1998). *Lineamiento Curriculares para el área de matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Colombia. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Bogotá: Magisterio.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen, *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching* (Vol. 10, págs. 63 - 85). Netherlands: Springer.

Fiallo Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Valencia - España: Tesis doctoral de la Universidad de Valencia.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 427 - 422.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13, 135 - 157.

Montiel Espinosa, G. (2005). *Estudio socio - epistemológico de la función trigonométrica*. México: Tesis doctoral del Instituto Politécnico Nacional: Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada.

Pino Ceballos, J., & Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63 - 88.

Randahl, M. (2012). Approach to mathematics in textbooks at tertiary level: Exploring authors' views about their texts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(7), 881 - 896.

Reséndiz Baldera, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa*, 9(3), 435 - 458.

Selva, A., & Borba, M. (2013). *Uso de la Calculadora en los primeros grados de escolaridad*. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Tavera Acevedo, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2012). Pensamiento Variacional: El estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos. En F. J. Córdoba Gómez, & J. Cardeño Espinosa, *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (págs. 281 - 293). Medellín: ITM.

Vasco Uribe, C. E. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 9 - 25.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares colombianos. *Revista Virtual "Universidad Católica del Norte"*, 27, 1 - 21.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 514 - 528.

## **ANEXO N° 2**

Artículo que será presentado y publicado en el evento académico:

14° Encuentro colombiano de Matemática Educativa

Tavera y Villa-Ochoa (2013 b)

# **El pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas: una mirada desde los libros de texto**

Ferney Tavera Acevedo [ftavera827@yahoo.es](mailto:ftavera827@yahoo.es)

Universidad de Medellín (Estudiante Maestría en Educación Matemática)

Jhony Alexander Villa-Ochoa [javo@une.net.co](mailto:javo@une.net.co)

Universidad de Antioquia (Docente de la facultad de Educación)

*Resumen.* Con base en un análisis de los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia y algunos estudios e investigaciones sobre la variación asociada al estudio de la trigonometría plana, decidimos aplicar la técnica del análisis de contenido a algunos libros de texto del grado décimo frente al tipo de ejercicios y “problemas” que se proponen para abordar el estudio de las relaciones trigonométricas; este análisis muestra que generalmente esta temática se desarrolla a través de expresiones algebraicas para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo. Estos resultados muestran la necesidad de diseñar propuestas alternativas en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones “dinámicas” y funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo.

Palabras claves: Pensamiento variacional, libros de texto, relaciones trigonométricas y tecnología.

## **1 Presentación del problema**

Desde nuestra experiencia como docentes activos del sistema educativo colombiano hemos observado que uno de los principales recursos didácticos que emplea el docente para planificar sus intervenciones en el aula de clase son los libros de texto, dado que orientan y encauzan muchas de las actividades que son desarrolladas por los estudiantes. A raíz de esto, consideramos que la mayoría de los docentes no solamente utilizan los libros de texto como guía para explicar los conceptos matemáticos, sino también como fuente bibliográfica para sacar ejercicios y problemas que son expuestos más adelante en evaluaciones, con el propósito que los estudiantes demuestren lo aprendido hasta el momento.

De acuerdo con esta indicación y los diferentes argumentos encontrados en la revisión inicial de literatura, se genera un especial interés por examinar algunos libros de texto que hagan referencia al estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, porque se pretende analizar las relaciones existentes entre las orientaciones derivadas de la literatura, lo emanado por el MEN desde los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006), y lo que habitualmente se presenta en el aula de clase a través de los libros de texto del grado décimo.

Este estudio previo, necesariamente nos condujo a plantear una serie de interrogantes en torno a la estructura interna que tienen los libros de texto del grado décimo, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones trigonométricas. Para ello, hemos formulado la siguiente pregunta: ¿Qué aspectos del pensamiento variacional se evidencian a través de los libros de texto del grado décimo, en el estudio de las relaciones trigonométricas?

## **2 Referente conceptual**

Una de las temáticas más importantes para abordar en la enseñanza de las matemáticas, desde el punto de vista de la Educación Básica y la Educación Media en Colombia, es el desarrollo del



pensamiento variacional. Para ello, el MEN presenta algunos elementos que posibilitan su identificación a través del estudio de la variación, pues considera que el pensamiento variacional está en relación con el “*reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos*” (Colombia, 2006, p. 66).

Tanto desde los documentos emanados por el MEN (Colombia, 1998, 2006) como desde los planteamientos de Vasco (2006) observamos un interés en el reconocimiento de la variación en otros contextos (e. g: desde lo numérico, lo geométrico, lo métrico,...), aplicado a otras ciencias y a la cotidianidad de los estudiantes, puesto que se incorpora el movimiento en forma de variable, de tal manera, que se analicen y se interpreten las relaciones producidas por éstas en una situación determinada.

Desde esta perspectiva, se hizo necesaria una revisión bibliográfica de algunos textos escolares, donde observamos que en varias ocasiones los libros de textos del grado décimo “desaprovechan” algunas oportunidades para abordar de manera dinámica el estudio de las relaciones trigonométricas, trayendo como consecuencia que esta temática de la trigonometría plana sea asumida como un proceso memorístico, rutinario y mecánico, que se desarrolla a través de fórmulas para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo.

La idea de centrar la atención en los libros de texto se consolida mediante estudios e investigaciones que se han realizado en las últimas décadas, donde se resalta las implicaciones que tienen los libros de texto en las prácticas educativas generadas por el docente en el aula de clase. Al respecto Randahl (2012) expresa el papel que cumplen los libros de texto en el aula de clase, pues los asume como: objeto de estudio, material de consulta, registro de las actividades desarrolladas por los estudiantes, recopilación de ejercicios y problemas que se resuelven para mostrar lo aprendido.

Por otra parte, consideramos que las actividades planteadas en los libros de texto generalmente pertenecen a un contexto, razón que se justifica desde la literatura, dado que Font (2007) retoma el trabajo de Martínez para distinguir los siguientes tipos de contexto:

- a) *Contexto real*: se refiere a la práctica real de las matemáticas, según el entorno sociocultural.
- b) *Contexto simulado*: es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características.
- c) *Contexto evocado*: se refiere a los problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula de clase, y permite imaginar una situación donde se da este hecho.

Esta idea necesariamente conduce a Font (2007) a establecer una diferencia particular entre los tipos de problemas contextualizados y los problemas escolares no-contextualizados (es decir, de contexto matemático), porque según este autor, los problemas que más han interesado en didáctica de las matemáticas han sido los problemas de contexto evocado; y debido a la complejidad de los procesos que se emplean para su resolución, determina un nuevo criterio para establecer otra clasificación, la cual está compuesta básicamente por dos tipos de problemas: aquellos problemas contextualizados que se han diseñado para activar procesos de modelización,

mientras que el otro, son los problemas relativamente sencillos cuyo propósito es la aplicación de los conceptos matemáticos previamente estudiados.

### 3 Metodología

En esta investigación se analizó un conjunto de libros de textos de primer semestre de Universidad en los cursos de trigonometría, y otros, usados para apoyar la formación de los estudiantes del nivel de Educación Media. En este documento se fundamenta en los análisis hechos a los siguientes libros de texto de grado décimo:

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Editorial
Buitrago, L; Romero, J; Ortiz, L; Gamboa, J; Morales, D; Castaño J.	2013	<i>Los caminos del saber Matemáticas 10</i>	Santillana
Galindo, E; Cely, J.	2009	<i>Fórmula 10</i>	Voluntad S.A
Bautista, M; Ramírez, C; Chamorro, A; Romero, J; Torres, W.	2007	<i>Trigonometría, geometría analítica y estadística</i>	Santillana
Moreno, V.	2006	<i>Conexiones Matemáticas 10</i>	Norma

Este análisis arrojó que generalmente los libros de texto analizados para el grado décimo, inician con una serie de lecturas para que los estudiantes analicen e interpreten situaciones históricas que dieron origen a la construcción de ese conocimiento, después introducen cada temática con una presentación general de la misma, para luego mostrar las definiciones y propiedades (algunas demostradas) con algunos ejemplos, posteriormente se destina un espacio para resolver ejercicios y problemas de aplicación, donde se encuentran los *problemas contextualizados* (Font, 2007) y, finalmente, hacen un comentario informativo de como utilizar la tecnología para algunos conceptos matemáticos, no necesariamente relacionados con el tema que se esta trabajando en esos momentos.

De acuerdo a lo expresado en el apartado anterior, la variación está en relación con los contextos y estos a su vez, se plasman en problemas, situaciones y ejercicios que generalmente se presentan en los libros de texto. De ahora en adelante, se denominan bajo la categoría de tareas, a todas aquellas formas en que los libros de texto proponen actividades para que los estudiantes profundicen en sus conocimientos, en concordancia con el estudio de las relaciones trigonométricas.

### 4 Análisis de los datos

Para realizar el análisis y la interpretación de los datos, se realizaron todas las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en cada uno de los libros de texto seleccionados, de tal manera, que se registraron mediante tablas los resultados allí encontrados, teniendo en cuenta la frecuencia de las categorías y subcategorías halladas en la solución de las tareas planteadas.

En la siguiente tabla se observa la frecuencia de tareas que usan los libros de textos analizados, de acuerdo a si son tareas que hacen referencia a un contexto matemático, o a un contexto evocado, o a un contexto simulado, o a problemas reales (Font, 2007).

<div>Tipo de problema</div> <div>Nombre del Texto</div>	Contexto matemático	Contexto evocado	Contexto Simulado	Problemas reales
<i>Los caminos del saber Matemáticas 10</i>	75	33	0	0
<i>Fórmula 10</i>	30	69	0	0
<i>Trigonometría, geometría analítica y estadística</i>	45	18	0	0
<i>Conexiones Matemáticas 10</i>	48	42	0	0

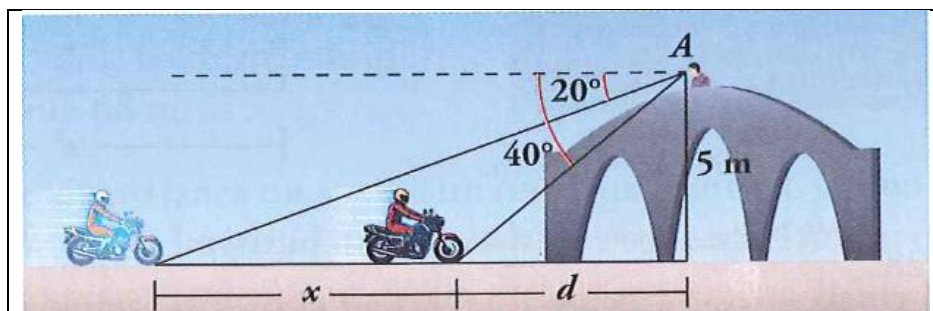
La información presentada en la tabla anterior, permite deducir que los libros de texto del grado décimo privilegian las tareas que hacen alusión a un contexto matemático y alguna veces a un contexto evocado, puesto que están asociadas, a un conjunto de enunciados de tipo verbal, los cuales utilizan cierto tipo de *realismo hipotético* en el que queda “transparente” cualquier situación que haga referencia a que se produzca en la “realidad”, es decir, situaciones de modelación matemática según lo propone Villa-Ochoa y Jaramillo (2011).

Al analizar las tareas propuestas en los libros de texto observamos que en ellas se reconocen las relaciones que existen entre las cantidades (variables o no), para ello, determinan dos tipos de tareas. La primera de ellas, son tareas en las cuales las razones trigonométricas se presentan para calcular “cantidades fijas” desconocidas (incógnitas) a partir de datos presentados en el enunciado; la segunda, son aquellas, en las cuales se hace un uso de las razones para describir alguna relación de tipo variacional entre cantidades. A continuación presentamos la descripción de una de las categorías encontradas con su respectivo ejemplo.

Tareas con una interpretación “*seudo - dinámica*” de las razones trigonométricas, utilizando el *contexto evocado*: esta tipología de tareas se cimienta en la presentación explícita o implícita de unas cantidades que se caracterizan por ser “variables”, puesto que describen en sus enunciados situaciones “aparentemente dinámicas” o “variacionales”. A continuación presentamos uno de los enunciados extraído de uno de los textos analizados que ejemplifican esta tipología de tareas:

Un espectador observa aun motociclista desde un punto A de un puente, ubicado a 5 metros de altura con respecto a una carretera recta. Si en un *instante* el ángulo de depresión *varia* de  $20^\circ$  a  $40^\circ$ , ¿Qué distancia recorre el motociclista en este periodo de tiempo?

La representación gráfica de esta tarea es:



Este enunciado obedece a las siguientes expresiones algebraicas:

$$1 \quad \tan 40^\circ = \frac{5 \text{ m}}{d}$$

$$2 \quad \tan 20^\circ = \frac{5 \text{ m}}{x+d}$$

En este ejemplo se observa supuestamente un movimiento, es decir, una variación del ángulo  $\theta$  que va desde  $20^\circ$  a  $40^\circ$  cuando el motociclista recorre  $x$  distancia, sin embargo, cuando se resuelve la tarea dicho movimiento se ignora, para reducirse a la presencia de unas cantidades fijas conocidas, que son constantes (e. g.: ángulos de depresión) y otras desconocidas (e. g.: la expresión  $x$  que representa la distancia parcial que recorre el motociclista y la expresión  $d$  que representa la distancia que le hace falta al motociclista para llegar al punto donde esta parado el espectador perpendicularmente).

De acuerdo con esto, en esta tipología de tareas se reitera una vez más, debido al análisis de la otra categoría, el hallazgo de un valor numérico en particular -distancia que recorre el motociclista-, a pesar de que en este enunciado se utilizan algunas palabras que dan cuenta de los fenómenos de cambio y variación en una situación.

## 5 Conclusión

La mayoría de los ejercicios y problemas están diseñados para que el estudiante, calcule el valor numérico de una distancia o de un ángulo en un triángulo, en el cual los demás datos están dados. Así mismo, se desaprovechan los contextos de las situaciones planteados para hacer un estudio de las relaciones dinámicas (variacionales) entre las cantidades que en ellas intervienen; en otras palabras, las medidas a determinar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales se pueden establecer ciertas relaciones funcionales.

## Bibliografía

- Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 367 - 390.
- Borba, M., & Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer.

- Colombia. MEN. (1998). *Lineamiento Curriculares para el área de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Colombia. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Bogotá: Magisterio.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 427 - 422.
- Randahl, M. (2012). Approach to mathematics in textbooks at tertiary level: Exploring authors' views about their texts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(7), 881 - 896.
- Vasco Uribe, C. E. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148). Bogotá - Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Villa-Ochoa, J. A., & Jaramillo López, C. M. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri & G. Stillman (Eds.), (Vol. 1, pp. 701-711): Springer Netherlands.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, 10(3), 514 - 528.

### **ANEXO N° 3**

Artículo publicado en el libro: Desarrollo y uso didáctico de Geogebra.

Tavera y Villa-Ochoa (2012).

Memorias de la Conferencia Latinoamericana Geogebra Colombia 2012 y

XVII Encuentro Departamental de Matemáticas.

# PENSAMIENTO VARIACIONAL: EL ESTUDIO DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN CONTEXTOS DINÁMICOS

Ferney Tavera Acevedo<sup>8</sup>

Jhony Alexander Villa Ochoa<sup>9</sup>

## RESUMEN

Este documento se elabora a partir de una revisión inicial de literatura donde se analizaron los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia y algunos estudios e investigaciones en el campo de la variación y la trigonometría. Desde los elementos teóricos observados en la literatura se hizo indispensable un análisis de algunos libros de texto frente al tipo de ejercicios que se proponía para abordar la trigonometría plana, de este análisis surgió la necesidad de diseñar propuestas alternativas en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo; de este modo, se espera aportar elementos para superar la idea de que las relaciones trigonométricas son “formulas” para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo.

## PALABRAS CLAVE

Pensamiento Variacional, Relaciones Trigonómicas, Software Geogebra

## ABSTRACT

This document derives from an initial review of literature where the *Lineamientos Curriculares* (Curriculum Guidelines) of Mathematics, the *Estándares Básicos de Competencia* (Basic Standards of Competences) and some studies and researches were analyzed on the variation and trigonometry field. Based on the theoretical elements observed in the literature, an analysis of some textbooks set against the type of exercises proposed was done to undertake the plain trigonometry, from this analysis the need to develop alternative proposals which emphasize visualization functional relationships between angles and sides of a triangle was raised. In this way, it is expected to contribute elements to overcome the idea that trigonometry are "formulas" for calculating fixed and unknown data of a triangle.

**Keywords:** Variational Thinking, Trigonometry, Geogebra Software

## INTRODUCCIÓN

---

<sup>8</sup> Estudiante Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín. Docente de la Institución Educativa Escuela Normal Superior “Genoveva Díaz”. San Jerónimo, [ftavera827@yahoo.es](mailto:ftavera827@yahoo.es)

<sup>9</sup> Doctor en Educación (Matemática). Docente del Departamento de Ciencias Básicas. Universidad de Medellín. Medellín, Antioquia, [javo@une.net.co](mailto:javo@une.net.co)

Este trabajo constituye un reporte parcial de investigación que se desarrolla en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín, en el cual se aborda la utilización del software Geogebra para el estudio variacional de algunos tópicos de la trigonometría. Esta indagación se enmarca en una investigación más amplia titulada “Incorporación de nuevos medios por un colectivo de profesores–con-medios”, desarrollada por la Universidad de Medellín y cofinanciada por las Universidades de Antioquia y la UNESP-Brasil.

En el estudio que se reporta en este documento se pretende indagar por la manera como los estudiantes producen conocimiento matemático en algunos tópicos de la trigonometría desde una perspectiva variacional; en particular, se socializan los primeros hallazgos obtenidos a partir de una revisión de literatura tanto desde el pensamiento variacional como de la trigonometría misma; de igual manera, se propone y analiza algunas actividades que pueden ser pertinentes para atender a las necesidades que surgen de la revisión anteriormente mencionada.

## **EL PENSAMIENTO VARIACIONAL. ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS**

En primera instancia se revisaron las consideraciones del Ministerio de Educación Nacional con la publicación de los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006); estos documentos proporcionan orientaciones frente al currículo del área de matemáticas; asimismo, expresan, de forma implícita, algunas ideas para tener en cuenta en el estudio de la trigonometría.

Desde estos textos el Ministerio de Educación Nacional (Colombia, 1998, 2006) propone que el pensamiento variacional está en relación con “*el reconocimiento, la percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación, y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos*” (Colombia, 1998, p. 73). Para desarrollar este tipo de pensamiento se hace necesario propiciar en el aula de clase espacios para que los estudiantes exploren, reflexionen, deduzcan, conjeturen y planteen nuevas situaciones frente a relaciones dinámicas entre los conceptos matemáticos, en este caso del presente documento, interesan los



conceptos que tienen que ver con algunos tópicos de la trigonometría. De otro modo, el MEN resalta que este tipo de pensamiento debe cumplir *“un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas”* (Colombia, 2006, p. 66).

Por otra parte, Vasco (2006) considera que el pensamiento variacional va más allá de las interpretaciones clásicas del álgebra, en ese sentido, proporciona algunas ideas sobre lo que se puede entender por este tipo de pensamiento. Para tratar de ofrecer una descripción más específica de cómo se debe asumir el pensamiento variacional, él propone nuevos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones de entre este pensamiento, la modelación y la tecnología; de esa manera, puntualiza que este pensamiento puede describirse

[...] como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

De acuerdo a esta mirada, se considera que la tecnología promueve alternativas muy diferentes a las convencionales (i.e. uso de papel y lápiz) sobre las cuales se pueden presentar los conceptos matemáticos (en este caso, aquellos que tienen que ver con algunos tópicos de trigonometría), de tal manera que su intervención sea percibida como una manera de indagar no solo por procesos asociados a la modelación; sino también, como una manera de producir y reproducir las relaciones variacionales que se pueden reconocer entre algunos objetos matemáticos (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010).

Tanto desde los documentos expuestos por el Ministerio de Educación Nacional (Colombia, 1998, 2006) como desde los planteamientos de Vasco (2006) se observa un interés en el reconocimiento de la variación en otros contextos (i.e. numéricos, geométricos, métricos, algebraicos...). Teniendo estas consideraciones en mente se hizo una revisión de algunos libros de texto, de allí, se pudo observar que en varias oportunidades los libros textos “desaprovechan” algunas oportunidades para abordar relaciones dinámicas en el estudio de algunos tópicos de la

trigonometría. Algunas evidencias sobre esta aserción, se presentan en el apartado denominado “*Algunos hallazgos en los libros de texto*” desarrollado más adelante en este documento.

### *Geogebra y el estudio variacional de las relaciones trigonométricas*

El uso del software Geogebra como una herramienta para potenciar el pensamiento variacional, ya ha sido tema de discusión por autores como Villa-Ochoa y Ruiz (2010) quienes señalan que en el diseño de situaciones para el aula de clase con auxilio del Geogebra se ponen de relieve diferentes aspectos asociados al pensamiento variacional, entre ellos: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia, construcción de herramientas, surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, refutación o demostración formal de las conjeturas. Estos elementos resaltan el papel que tiene Geogebra en la visualización de nociones asociadas a la variación, lo cual es posible gracias al ambiente dinámico que proporciona el software.

El software Geogebra, por considerarse como un ambiente de Geometría Dinámica, se convierte en una herramienta que posibilita hacer visualmente explícito el *dinamismo implícito* de conceptos matemáticos. Leung (2008) entiende por *dinamismo implícito* aquellas actividades o razonamientos matemáticos que se emplean para comprender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de “animación mental”, es decir, la visualización mental de las variaciones de objetos conceptuales de los que se espera “observar” patrones de variación o propiedades invariantes.

Basados en lo anterior, se observa que a través de un *Ambiente de Geometría Dinámica* (proporcionado por el software Geogebra) es posible estudiar visualmente la variación de un aspecto de un concepto matemático (en este caso, figuras en las que se puede observar relaciones trigonométricas) mientras otras se mantienen constantes. Es por esta situación, que Leung (2008) asume la variación como una *esencia epistémica* de la modalidad de arrastre; su objetivo se ve reflejado en el hecho de *generar estrategias de arrastre para descubrir propiedades invariantes en medio de los diferentes componentes de una configuración geométrica*. Es así, como la Geometría Dinámica requiere de otras funcionalidades que son expresadas desde el pensamiento

métrico y el sistema de medidas, porque el software Geogebra utiliza constantemente el comando “elige y mueve”, *para acentuar los diferentes patrones de variación que pueden dar lugar a la aparición de patrones geométricos*. Las ideas anteriormente estudiadas, parecen generar ciertos *insights* sobre cómo la variación puede contribuir al discernimiento del conocimiento propio de la trigonometría, porque proporciona descubrir escenario distintos a los convencionales y observar algunas aplicaciones de la trigonometría fuera del ámbito escolar.

### *Algunos hallazgos en los libros de texto*

En segunda instancia se analizaron siete libros de texto, tanto de la Educación Media como universitarios, en los cuales se desarrollan los contenidos temáticos asociados a la trigonometría; esto fueron los siguientes: *Serie Matematica Progresiva "Geometria Analitica y Trigonometria"*, cuyos autores son Nelson Londoño y Hernando Bedoya (1988); *“Matematica experimental 10”* de Julio Alberto Uribe Cálad (1998); *“Álgebra y Trigonometría”* de Dennis Zill y Jacqueline Dewar (2000); *“Álgebra y trigonometria con geometria analitica”* de Earl Swokowski y Jeffery Cole (2002). *“Matematicas previas al cálculo”*, cuyos autores son Francisco Mejia Duque, Rafael Álvarez Jiménez y Horacio Fernández Castaño (2005); *“Matematicas básicas con aplicaciones a las ciencias economicas y afines”* de Rafael Álvarez Jimenez, Horacio Fernández Castaño y José Alberto Rúa Vásquez (2009); *“Hipertexto Matemáticas 10”* de la Editorial Santillana (2010).

La selección de estos textos se hizo atendiendo a que son libros que generalmente se referencian por los profesores como bibliografía básica para los cursos de matemática en la Educación Media (15 - 18 años) o para los primeros semestres de Universidad. Esta revisión se hizo, en parte, porque habitualmente los libros de texto pueden ser considerados como mediadores curriculares, que son utilizados por el docente de matemáticas para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes en las aulas de clase.

En los libros de texto analizados se encontró la siguiente regularidad: *La mayoría de los ejercicios y tareas se orientan a la solución de problemas, donde hay que hallar el valor numérico de una distancia o de un ángulo en un triángulo en el cual los demás datos están*

*dados. Así mismo se desaprovechan los contextos de los ejercicios planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen; en otras palabras, las medidas a determinar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales se pueden establecer ciertas relaciones funcionales.*

De otro modo, en la revisión de los textos observamos un uso constante de fórmulas, caracterizado por un dominio algebraico y procedimental, que hace énfasis en el manejo apropiado de símbolos, operaciones y propiedades y, en ocasiones, se desatiende al reconocimiento de las nociones dinámicas que se presentan en algunos tópicos de la trigonometría. A continuación transcribimos algunos “problemas” y mostramos la “desarticulación” que se presenta entre ellos y el desarrollo del pensamiento variacional:

- 1 Desde un punto al nivel del suelo y a 135 *pies* de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es  $57^{\circ}20'$ . *Calcular la altura de la torre.*
- 2 Si los rayos del sol forman un ángulo de  $65^{\circ}$  con el suelo y la sombra de un mástil es de 86 *cm* ¿Cuál es la altura del mástil medido en metros?
- 3 Dos barcos son contratados para remolcar un barco petrolero que esta varado en el océano, despliegan sus cables que tienen longitudes de 500 *m* y 524 *m* respectivamente, si están distanciados 300 *m*, ¿Cuál es el ángulo entre los cables?
- 4 Cuando el ángulo de elevación del Sol es de  $64^{\circ}$ , un poste de teléfono inclinado a un ángulo de  $9^{\circ}$  en dirección opuesta al Sol arroja una sombra de 21 *pies* de largo a nivel del suelo. *Calcula la longitud del poste.*
- 5 Dos hombres que están en un campo llano y se encuentran separados a una distancia de 300 *metros* uno del otro, observan mutuamente un helicóptero. Sus ángulos de elevación respecto al objeto volador son  $60^{\circ}$  y  $75^{\circ}$ . *Determinar la altura a la cual se encuentra el helicóptero.*
- 6 La distancia entre la meta y un hoyo particular de golf es de 380 *m*. Un golfista le pega a la pelota y la coloca a 215 *m*. Desde el punto donde está la pelota ella mide un ángulo de  $165^{\circ}$  entre la meta y el hoyo. *Encuentre el ángulo de su lanzamiento.*

Se observa que este tipo de “ejercicios” ocupan la parte de las aplicaciones de las relaciones trigonométricas en los libros de texto analizados y no encontramos otro tipo de “problemas” que

ofrezcan la descripción de una relación funcional entre los lados y los ángulos de un triángulo. Estos primeros hallazgos ponen de relieve la necesidad de establecer nuevas relaciones en las cuales los conceptos matemáticos se observen de una manera dinámica. En ese sentido, el uso del software Geogebra, se muestra como una herramienta importante para resaltar nociones de tipo variacional (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010), porque brinda la posibilidad de vivenciar de manera experimental los conceptos y propiedades que hace poco solo se manejaban desde el papel bajo ideas en abstracto.

## **A MANERA DE PROPUESTA**

Teniendo en cuenta los elementos anteriormente planteados se genera un especial interés por el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional; para ello se utiliza el software Geogebra, atendiendo a que una de sus principales ventajas consiste en que las figuras pueden dejar de abordarse de manera estática e incluso facilita la interacción con ellas modificando ciertas condiciones en su diseño. Estos elementos sugieren preguntas sobre la manera de integrarlos al diseño de ambientes de intervención en el aula, frente a ello surge el siguiente interrogante:

¿Cómo explorar relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional a través del software Geogebra?

Como una manera de aproximarse a esta pregunta presentamos, a manera de ejemplo, la actividad denominada “Las Sombras del Árbol” (ver figura 1), donde actúa como escenario para observar algunas relaciones funcionales o dinámicas entre cantidades, en un problema propio de trigonometría. Esta actividad se empieza a desarrollar cuando dos personas discuten sobre la medida de la sombra de un árbol; para ello, es necesario simular los rayos solares, para poder visualizar con claridad como cambia dicha sombra. Para realizar ésto, los estudiantes han de fijar un triángulo, que puede ser rectángulo u obtusángulo dependiendo de la inclinación del terreno, la cual es proporcionada por el deslizador  $\alpha$  (alpha) en la figura. De manera particular, los elementos que varía en la situación son:

- *El ángulo de elevación del terreno:* proporcionado por el deslizador  $\alpha$  (alpha) que se encuentra en la parte superior izquierda de la ventana. Este deslizador puede funcionar como un parámetro, el cual se “fija” para poder determinar el tipo de triángulo y la variación entre los lados y los ángulos del triángulo (ver figura 1).
- *El ángulo de inclinación del árbol.* Este ángulo está determinado por la superficie (piso) y el árbol; dicho ángulo siempre estará en función del ángulo  $\alpha$  (alpha) y, por tanto, también puede funcionar como un parámetro.
- *La posición de sol.* La situación incorpora el movimiento del sol el cual se desliza por una línea horizontal generando, a su vez, una variación del *ángulo formado por la superficie (piso) y los rayos solares* y, de la misma manera, la variación de la *sombra proyectada por el árbol sobre la superficie*.
- *Longitud del árbol.* En esta situación la longitud del árbol puede cambiar de acuerdo al deslizador “longitud”, que se muestra en la parte superior izquierda de la figura 1.

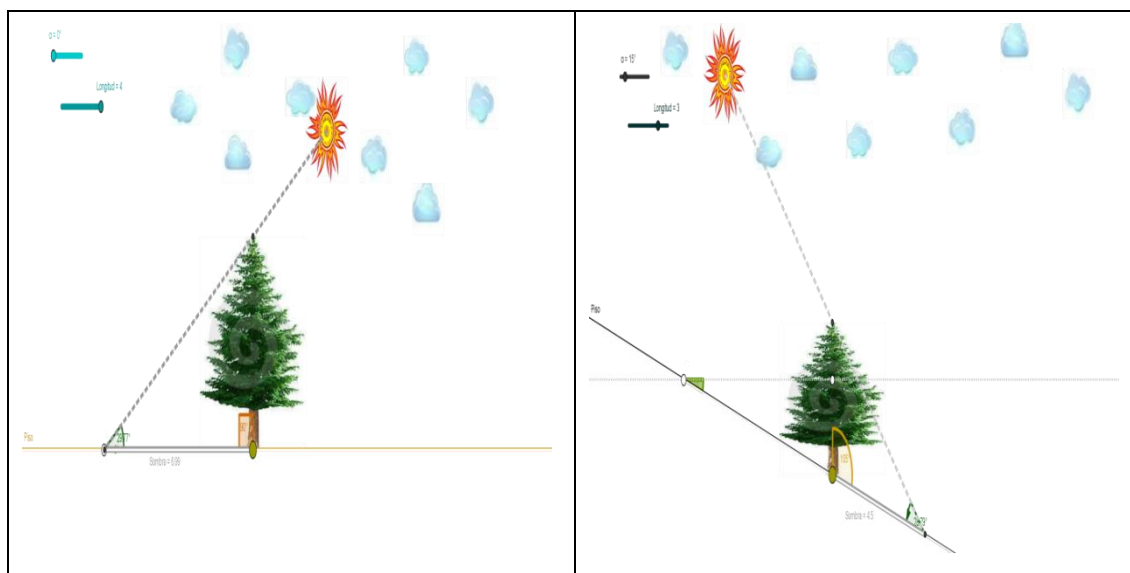


Figura 1. Construcción gráfica de la variación en un problema de Trigonometría

La situación está diseñada para abordarse en varios momentos, en un primer momento el ángulo  $\alpha$  (alpha) se fija en  $0^\circ$  (cero grados) generando una relación de covariación entre *la sombra del árbol* y el *ángulo de elevación formado por los rayos de sol y la superficie*. En este primer momento el estudio se reduce a establecer dicha covariación se describe mediante la relación trigonométrica tangente.

En un segundo momento, el ángulo  $\alpha$  (alpha) puede variar y, en estos casos, la covariación entre la sombra y el ángulo formado por los rayos del sol y la superficie origina un triángulo no rectángulo lo que conduce al estudio de otras propiedades de la trigonometría plana, a saber, las leyes del seno y del coseno.

En cada momento de la situación están presente preguntas como: ¿Qué cantidades varían?, ¿Cómo varían? ¿En cuánto varían? Y con la ayuda de las tablas y los gráficos proporcionados por el software Geogebra se construye una visión más amplia sobre la situación de variación.

## CONSIDERACIONES FINALES

Con los elementos propuestos en este documento se espera proporcionar espacios alternativos en los cuales los estudiantes puedan acceder al estudio de relaciones dinámicas entre cantidades los ángulos y los lados de triángulos rectángulos y oblicuángulos; de esa manera, las relaciones trigonométricas y las leyes del seno y del coseno podrían adquirir significados que vayan más allá de unas “fórmulas para calcular valores fijos pero desconocidos”. Con este tipo de estrategias se espera cimentar el posterior estudio de las funciones trigonométricas las cuales generalmente se introducen con el estudio de la función circular y otros elementos de la trigonometría analítica.

## REFERENCIAS

Álvarez Jimenez, R., Fernández Castaño, H., & Rúa Vásquez, J. (2009). *Matemáticas básicas con aplicaciones a las ciencias económicas y afines*. Medellín: Ecoe Ediciones Ltda y Sello Editorial Universidad de Medellín.

- Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(1), 25 - 45.
- Borba, M., & Godoy Penteado, M. (2010). *Informática e Educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Borba, M., & Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer.
- Colombia, M.E.N. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Colombia, M.E.N. (2006). *Estandares Básicos de Competencia*. Bogotá: Magisterio.
- Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 135 - 157.
- Londoño, N., & Bedoya, H. (1988). *Serie Matematica Progresiva "Geometria Analitica y Trigonometria"*. Santa Fe de Bogotá: Norma.
- Mejia Duque, F., Álvarez Jiménez, R., & Fernández Castaño, H. (2005). *Matematicas previas al cálculo*. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Swokowski, E., & Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometria con geometria analitica* (Decima ed.). Mexico: Thomson Learning.
- Uribe Cálad, J. A. (1998). *Matematica Experimental 10*. Santa Fe de Bogotá: Uros Editores.
- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelacion y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos* (págs. 134 - 148). Santa Fe de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.



- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares colombianos. *Revista virtual "Universidad Católica del Norte"*, 27, 1 - 21.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, 10(3), 514 - 528.
- Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2000). *Álgebra y Trigonometría*. Santa Fe de Bogotá: McGraw - Hill.